

# CW 複体

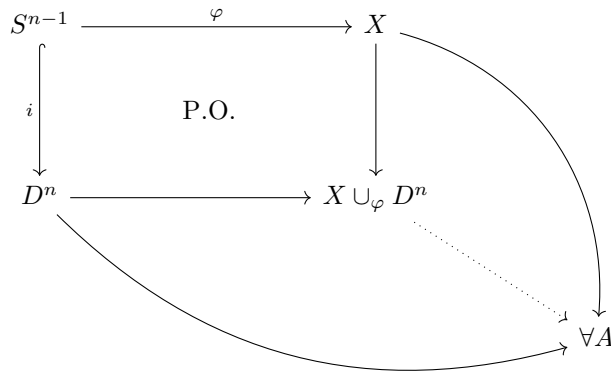
ゐぶ

## 概要

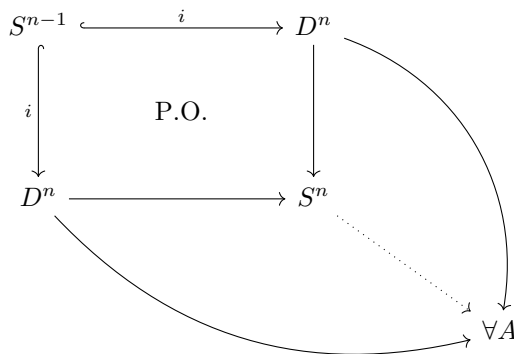
多様体など重要な空間が CW 複体となるため、古い代数的トポロジーの本では、CW 複体を「空間」と考えているものが多い。<sup>\*1</sup> 本稿では CW 複体を定義し、例をあげ、様々な性質を示す。

## 1 定義と例

位相空間の圏は余完備なので、 $X$  を位相空間とし、 $\varphi: S^{n-1} \rightarrow X$  を連続写像とすると、 $\varphi$  と包含写像  $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  の押し出し  $X \cup_{\varphi} D^n$  が存在する。

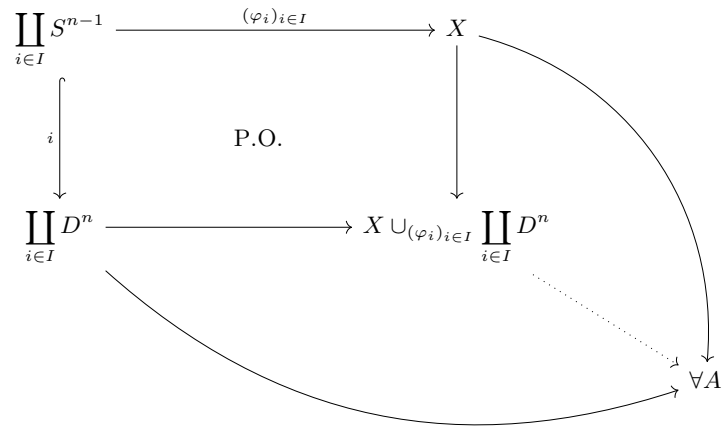


この方法により、 $S^n$  を得ることができる。



<sup>\*1</sup> 現代ではモデル圏の理論が整備され、CW 複体より単体的集合を用いるようになってきた。

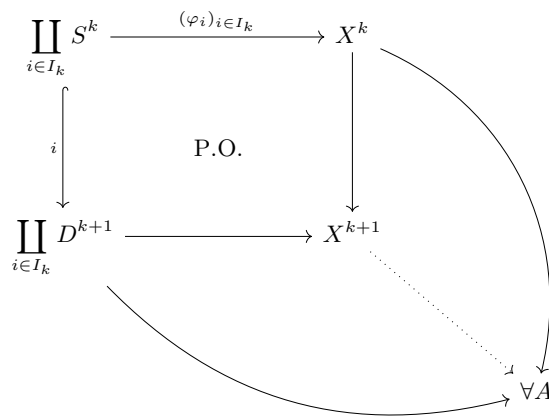
$(\phi_i: S^{n-1} \rightarrow X)_{i \in I}$  を連続写像の族とすると, 連続写像  $(\varphi_i)_{i \in I}: \coprod_{i \in I} S^{n-1} \rightarrow X$  を得る. よって,  $(\varphi_i)_{i \in I}$  と包含写像  $i: \coprod_{i \in I} S^{n-1} \hookrightarrow \coprod_{i \in I} D^n$  の押し出し  $X \cup_{(\varphi_i)_{i \in I}} \coprod_{i \in I} D^n$  が存在する.



### Definition 1.1 (CW 複体)

位相空間  $X$  が以下を満たすとき, CW 複体という.

- (1)  $X^0$  を  $X$  の離散部分空間とし, 0 胞体という.
- (2)  $X^{k+1}$  は帰納的に接着写像とよばれる連続写像  $(\varphi_i)_{i \in I_k}: \coprod_{i \in I_k} S^k \rightarrow X^k$  と包含写像  $i: \coprod_{i \in I_k} S^k \hookrightarrow \coprod_{i \in I_k} D^{k+1}$  の押し出しとして得られる.



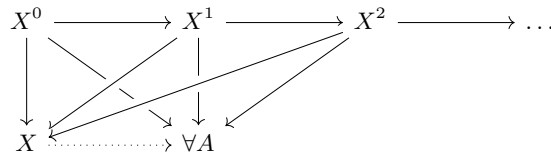
- (3)  $X$  は図式

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$$

の余極限として得られ, 弱位相をもつ. つまり,

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ に対し, } A \cap X^n \subset X^n \text{ は開集合}$$

が成立する.

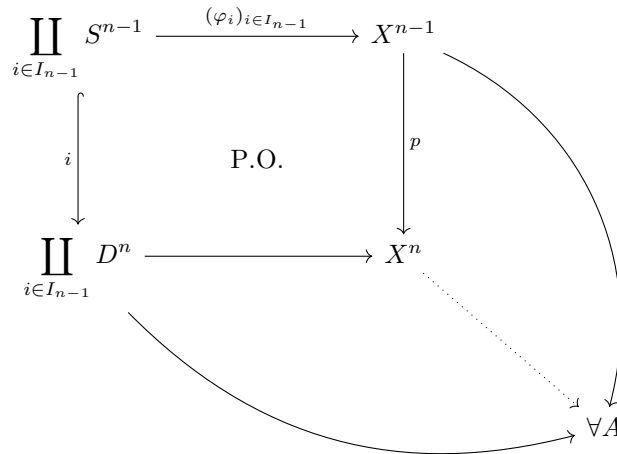


$D^n \hookrightarrow \coprod_{i \in I_n} D^n \longrightarrow X^n \longrightarrow X$  を特性写像,  $X^n$  を  $n$  骨格といい,  $X = X^n$  となる最小の  $n$  を

$X$  の次元\*2という. また, CW 複体の構成は一意でなく様々な構成が存在する.

有限次元の CW 複体は自然に弱位相をもつため (3) の弱位相の条件は不要である.

実際,  $A \subset X = X^n$  を開集合とすると, 押し出し



により得られる写像  $p: X^{n-1} \rightarrow X^n$  の連続性より,  $p^{-1}(A) = A \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$  は開集合である. これを帰納的に繰り返すと, 任意の  $k$  に対し,  $A \cap X^k \subset X^k$  は開集合である.

逆に任意の  $k$  に対し,  $A \cap X^k \subset X^k$  は開集合であるとすると,  $A = A \cap X^n \subset X^n = X$  は開集合である. よって有限次元 CW 複体は弱位相をもつ.

CW 複体の位相は特性写像によって特徴付けられる. つまり, 以下が成立する.

**Proposition 1.2**

CW 複体  $X$  に対し,

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の特性写像} \Phi: D^n \rightarrow X \text{ に対し, } \Phi^{-1}(A) \subset D^n \text{ は開集合}$$

**Proof:**

$\Rightarrow$

$\Phi$  の連続性より従う.

$\Leftarrow$

$X^0$  は  $X$  の離散部分空間なので  $A \cap X^0 \subset X^0$  は開集合である. ここで,  $A \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$  は開集合と仮定する. このとき,  $A \cap X^n \subset X^n$  は開集合なので, 帰納法より, 任意の  $n$  に対し,  $A \cap X^n \subset X^n$  は開集合である.  $X$  は弱位相をもつため,  $A \subset X$  は開集合である.

\*2 胞体の最大次元と一致する.



同様に,

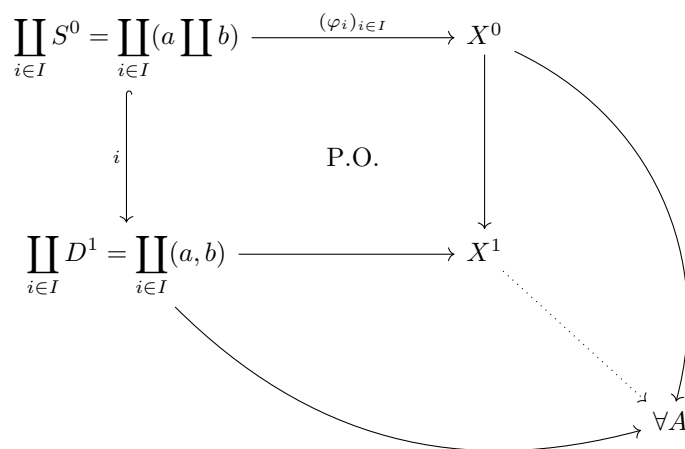
$A \subset X$  は閉集合  $\Leftrightarrow$  任意の特性写像  $\Phi: D^n \rightarrow X$  に対し,  $\Phi^{-1}(A) \subset D^n$  は閉集合

が成立する.

**Example 1.3**

グラフは 1 次元 CW 複体である.

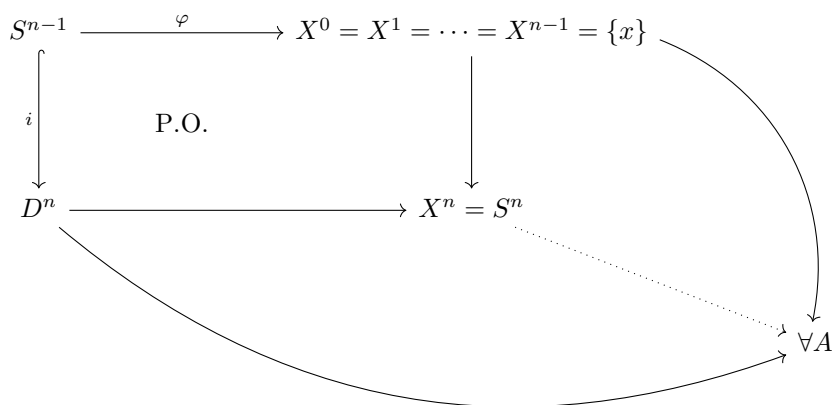
実際, グラフは 0 胞体 (頂点) と 1 胞体 (辺) をもつ CW 複体である.



**Example 1.4**

$S^n$  は CW 複体である.

実際,  $S^n$  は 0 胞体 ( $S^n$  の 1 点) と  $n$  胞体 ( $\text{Int } D^n$ ) をもつ CW 複体である.\*3

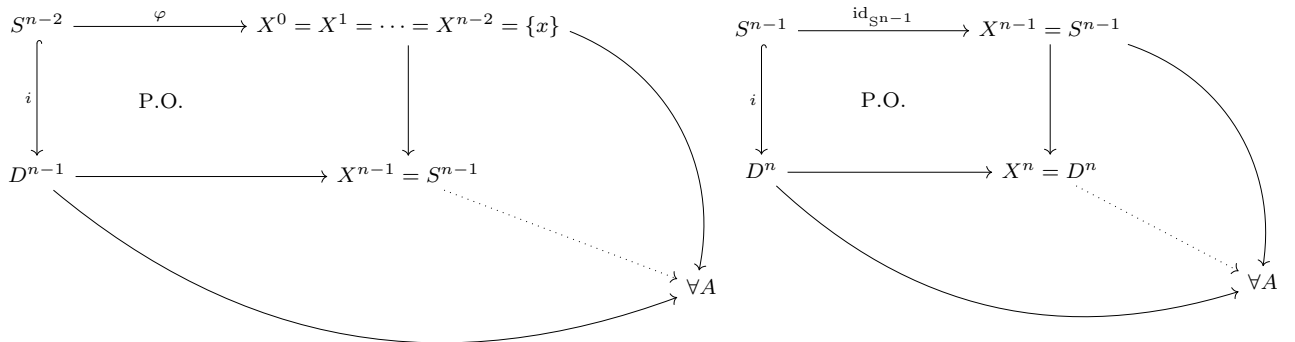


**Example 1.5**

$D^n$  は CW 複体である.

\*3  $S^n$  を  $D^n / \partial D^n$  とみなすことと同等である.

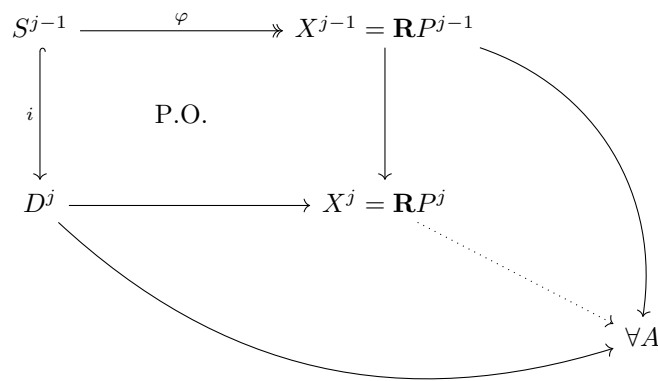
実際,  $D^n$  は 0 胞体 ( $S^n$  の 1 点) と  $n-1$  胞体 ( $\text{Int } D^{n-1}$ ) と  $n$  胞体 ( $\text{Int } D^n$ ) をもつ CW 複体である.



**Example 1.6**

$\mathbf{R}P^n$  は CW 複体である。

実際, 0 胞体, 1 胞体, ...,  $n$  胞体 ( $\mathbf{R}P^0, \text{Int } D^1, \dots, \text{Int } D^n$ ) をもつ CW 複体である.\*4



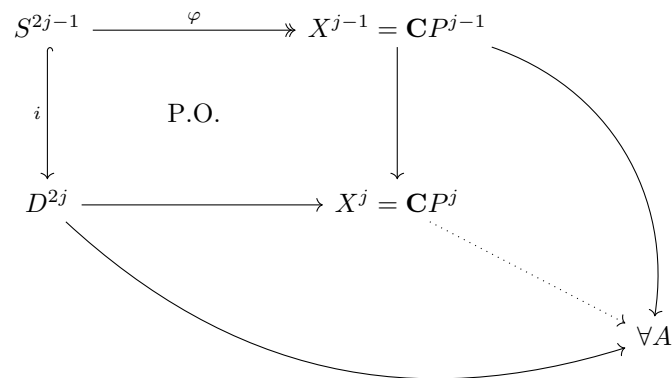
**Example 1.7**

$\mathbf{C}P^n$  は CW 複体である。

実際, 0 胞体, 2 胞体, ...,  $2n-2$  胞体,  $2n$  胞体 ( $\mathbf{C}P^0, \text{Int } D^2, \dots, \text{Int } D^{2n}$ ) をもつ CW 複体である.\*5

\*4  $\mathbf{R}P^n$  を  $S^n$  上に  $x \sim -x$  で定まる同値関係による商集合  $S^n / \sim$  とみなすことと同等である.

\*5  $\mathbf{C}P^n$  を  $S^{2n+1}$  上に  $x \sim \lambda x$  ( $|\lambda| = 1$ ) で定まる同値関係による商集合  $S^{2n+1} / \sim$  とみなすことと同等である.



**Definition 1.8 (部分複体, CW 対)**

$X$  を CW 複体とする.  $X$  の部分空間で胞体の和集合で表される  $A$  であり, 任意の  $A$  の胞体の閉包が  $A$  に含まれるものを  $X$  の部分複体といい,  $(X, A)$  を CW 対という.

CW 複体の部分複体は CW 複体となる.\*6また, 各骨格は部分複体である.

**Example 1.9**

CW 複体  $\mathbf{R}P^n$  に対し,  $\mathbf{R}P^i$  ( $i \leq n$ ) は部分複体である.

**Example 1.10**

CW 複体  $\mathbf{C}P^n$  に対し,  $\mathbf{C}P^i$  ( $i \leq n$ ) は部分複体である.

胞体はコンパクトであり, 有限個のコンパクト集合の直和の商空間はコンパクトであるため, 有限 CW 複体\*7はコンパクトである. 逆に以下が成立する.

**Proposition 1.11**

CW 複体  $X$  のコンパクト部分空間  $C$  はある有限部分複体に含まれる.

**Proof:**

$(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  を全て異なる胞体に属する  $C$  の無限点列とし,  $S := \{x_1, x_2, \dots\}$  とする.

まず, 帰納法を用いて,  $S \subset X$  が閉集合であることを示す.  $X^0$  は離散空間なので,  $S \cap X^0 \subset X^0$  は閉集合である. ここで,  $k \leq n-1$  に対し,  $S \cap X^k \subset X^k$  が閉集合だと仮定するとこれと接着写像の連続性より,  $S$  の任意の接着写像の逆像は閉集合である. よって,  $S$  の任意の特性写像の逆像は閉集合であり,  $S \cap X^n \subset X^n$  は閉集合である. したがって, 帰納法により, 任意の  $n$  に対し,  $S \cap X^n \subset X^n$  は閉集合である. また,  $X$  は弱位相をもつため,  $S \subset X$  は閉集合である.

同様に  $S$  の任意の部分集合も閉集合であることが従うため,  $S$  は離散位相をもつ. また, コンパクト空間  $C$  の閉部分空間  $S$  はコンパクトであり, 離散位相をもつ  $S$  がコンパクト集合なので  $S$  は有限集合である.

以上により,  $C$  は有限個の胞体の和集合に含まれる. よって, この有限個の胞体の和集合が  $X$  の有限部分複体に含まれることを示せば良いが, 有限部分複体の有限個の和集合は有限部分複体なので 1 つの胞体が有限部分複体に含まれることを示せば良い.

$k$  胞体の接着写像の像はコンパクト集合であるため, 有限個の  $k-1$  胞体と交わる. これを帰納的に考えると,  $k$  胞体の接着写像の像は有限個の  $l$  胞体と交わる ( $l \leq k-1$ ). よって, この像は有限部分複体に含まれる. したがって,  $k$  胞体は有限部分複体に含まれる.

\*6 骨格の構成は明らかであり, 弱位相をもつことは任意の  $n$  に対し,  $A^n = A \cap X^n$  が成立することより従う.

\*7 有限個の胞体からなる CW 複体を有限 CW 複体という.



CW 複体の「CW」とは、以下が成立することから名付けられた。

**Closure finiteness**

任意の胞体の閉包は有限個のみの胞体と交わる。

**Weak topology**

胞体の閉包による閉被覆に関し、弱位相をもつ。つまり、

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ 胞体 } e^n \text{ に対し, } A \cap \overline{e^n} \subset D^n \text{ は開集合}$$

が成立する。

Whitehead はこれらの 2 つの性質に注目して CW 複体の定義を与えた。実際以下のように CW 複体は特徴付けることができる。

**Proposition 1.12**

ハウスドルフ空間  $X$  と連続写像  $\Phi: D^n \rightarrow X$  の族が与えられ、以下を満たすとき、 $X$  は CW 複体であり、 $\Phi$  は特性写像である。

(1)  $\Phi$  は同相  $\text{Int} D^n \cong \Phi(\text{Int} D^n)$  を誘導し、 $X$  は胞体により直和分解される。つまり、 $\coprod e^n = X$  が成立する。

(2) 任意の胞体  $e^n$  に対し、 $\Phi(\partial D^n) \subset \bigcup_{n>i, \text{finite}} e^i$  が成立する。

(3)  $A \subset X$  は開集合  $\Leftrightarrow$  任意の  $n$  胞体  $e^n$  に対し、 $A \cap \overline{e^n} \subset D^n$  は開集合

が成立する。

逆に、CW 複体と特性写像は (1),(2),(3) を満たす。

**Proof:**

CW 複体と特性写像は (1),(2),(3) を満たすことは明らかなので、(1),(2),(3) を満たす  $X$  と  $\Phi$  が CW 複体と特性写像であることを示す。

$X^{n-1}$  を  $l$  胞体 ( $l < n$ ) 全ての和集合とし、連続全射  $f: X^{n-1} \coprod (\coprod D^n) \rightarrow X^n$  を以下で定める。

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X^{n-1} \\ \Phi(x) & x \in D^n \end{cases}$$

この  $f$  が商写像であることを示せば  $X^n$  は  $X^{n-1}$  に接着写像で  $n$  胞体を貼り付けて得られることがわかる。つまり、 $C \subset X^n$  に対し、 $f^{-1}(C)$  が閉集合と仮定し、 $C$  が閉集合であることを示せば良いが、(3) より、任意の胞体  $e^m$  に対し、 $C \cap \overline{e^m} \subset D^m$  が閉集合であることを示せば良いことがわかる。

$m < n$  のとき、仮定より、 $f^{-1}(C) = (C \cap X^{n-1}) \coprod \Phi^{-1}(C)$  は閉集合なので、 $C \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$  は閉集合である。よって、 $C \cap X^{n-1} \cap \overline{e^m} = C \cap \overline{e^m} \subset D^m$  は閉集合である。

$m = n$  のとき、 $f^{-1}(C) \cap D^n \subset D^n$  は閉集合であり、コンパクト集合である。よって、連続写像の像はコンパクトであるため、 $C \cap \overline{e^n}$  はコンパクト集合であり、ハウスドルフ性より、閉集合である。

$m > n$  のとき、 $C \subset X^n$  と (2) より、 $C \cap \overline{e^m} \subset \Phi(\partial D^m) \subset \bigcup_{m>i, \text{finite}} \overline{e^i}$  となり、 $m$  に関する帰納法より、 $C \cap \overline{e^i}$  は閉集

合である。よって、 $\bigcup_{m>i, \text{finite}} (C \cap \overline{e^i}) = C \cap \left( \bigcup_{m>i, \text{finite}} \overline{e^i} \right)$  は閉集合である。したがって、 $C \cap \left( \bigcup_{m>i, \text{finite}} \overline{e^i} \right) \cap \overline{e^m} = C \cap \overline{e^m}$  は閉集合である。

次に,

$$A \subset X \text{ は閉集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ に対し, } A \cap X^n \subset X^n \text{ は閉集合}$$

が成立することを示す.

$\Rightarrow$

上の議論を  $C = X^n$  とすれば,  $X^n$  は閉集合であるため, 任意の  $n$  に対し,  $A \cap X^n \subset X^n$  は閉集合である.

$\Leftarrow$

上の議論と同様に従う. ■

次に, CW 複体  $X$  の部分集合  $A$  の開近傍  $N_\varepsilon(A)$  について考える.

$N_\varepsilon(A)$  は以下のように帰納的に定義される.

まず,  $N_\varepsilon^0 := A \cap X^0$  とする. 次に,  $A \cap X^n \subset X^n$  の開近傍  $N_\varepsilon^n(A)$  が定義されているとし, 各  $n+1$  胞体に関する特性写像  $\Phi: D^{n+1} \rightarrow X$  の逆像を用いて,  $A \cap X^{n+1} \subset X^{n+1}$  の開近傍  $N_\varepsilon^{n+1}(A)$  を定義する. 正確には,  $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$  を  $\Phi^{-1}(A) \setminus \partial D^{n+1} \subset D^{n+1} \setminus \partial D^{n+1}$  の開近傍と  $(1-\varepsilon, 1] \times \Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$  の和集合と定義する. そして,  $N_\varepsilon(A) := \bigcup_n N_\varepsilon^n(A)$  と定義する.\*8

### Proposition 1.13

CW 複体は正規空間である.

#### Proof:

任意の特性写像による 1 点集合の逆像は閉集合であるため, 1 点集合は閉集合である.

次に, 交わらない閉集合  $A, B$  が十分小さな  $\varepsilon > 0$  をとることにより, 開近傍  $N_\varepsilon(A), N_\varepsilon(B)$  で分離できることを示す. 交わらない開近傍  $N_\varepsilon^n(A), N_\varepsilon^n(B)$  が構成されるとすると, 特性写像  $\Phi: D^{n+1} \rightarrow X$  に対し,  $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$  と  $\Phi^{-1}(B)$  は交わらない. 実際, 交わるとすると, コンパクト集合  $D^{n+1}$  の部分閉集合  $\Phi^{-1}(B)$  はコンパクト集合であり, 点列コンパクト性より,  $\Phi^{-1}(B)$  の点列で  $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A)) \cap \Phi^{-1}(B)$  の点に収束するものが取れる. しかし, これは,  $N_\varepsilon^n(A)$  と  $N_\varepsilon^n(B)$  が交わらないことに矛盾する. 同様に,  $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$  と  $\Phi^{-1}(A)$  は交わらないことがわかる. また,  $A$  と  $B$  は交わらないため,  $\Phi^{-1}(A)$  と  $\Phi^{-1}(B)$  は交わらない. したがって,  $N_\varepsilon(A)$  と  $N_\varepsilon(B)$  は交わらないことがわかる. ■

## 参考文献

- [1] Allen Hatcher(著)・「Algebraic Topology」・Cambridge University Press・2001
- [2] J. P. P. May(著)・「A Concise Course in Algebraic Topology」・University of Chicago Press・1999
- [3] <https://ncatlab.org/nlab/show/CW+complex>

\*8 任意の特性写像による  $N_\varepsilon(A)$  の逆像は開集合なので,  $N_\varepsilon(A)$  は開集合である.