

CW 複体

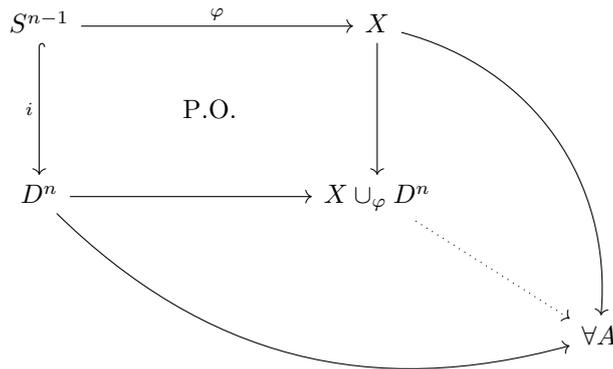
みぶ

概要

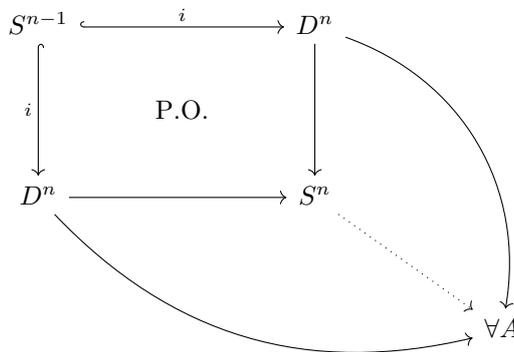
多様体など重要な空間が CW 複体となるため、古い代数的トポロジーの本では、CW 複体を「空間」と考えているものが多い。^{*1} 本稿では CW 複体を定義し、例をあげ、様々な性質を示す。

1 定義と例

位相空間の圏は余完備なので、 X を位相空間とし、 $\varphi: S^{n-1} \rightarrow X$ を連続写像とすると、 φ と包含写像 $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ の押し出し $X \cup_{\varphi} D^n$ が存在する。

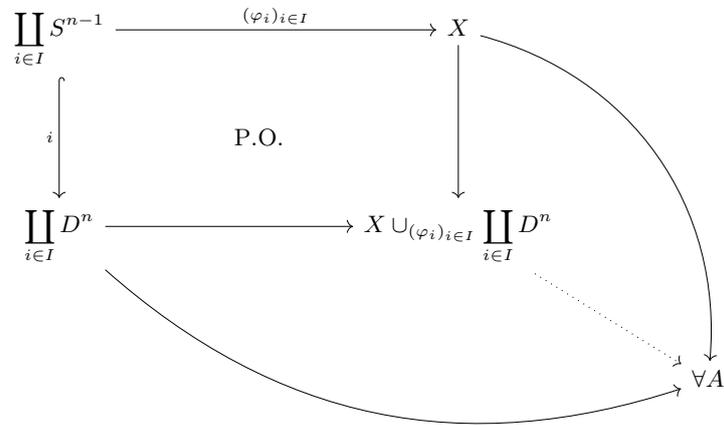


この方法により、 S^n を得ることができる。



^{*1} 現代ではモデル圏の理論が整備され、CW 複体より単体的集合を用いるようになってきた。

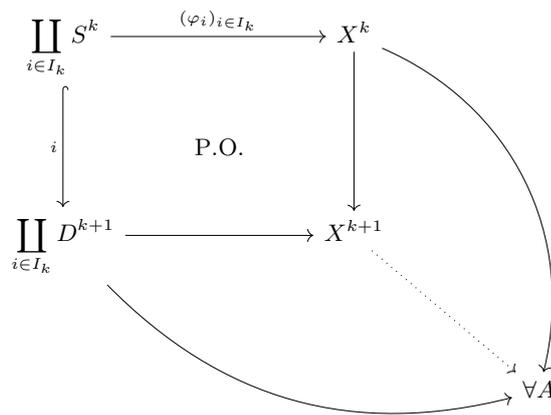
$(\phi_i: S^{n-1} \rightarrow X)_{i \in I}$ を連続写像の族とすると, 連続写像 $(\varphi_i)_{i \in I}: \coprod_{i \in I} S^{n-1} \rightarrow X$ を得る. よって, $(\varphi_i)_{i \in I}$ と包含写像 $i: \coprod_{i \in I} S^{n-1} \hookrightarrow \coprod_{i \in I} D^n$ の押し出し $X \cup_{(\varphi_i)_{i \in I}} \coprod_{i \in I} D^n$ が存在する.



Definition 1.1 (CW 複体)

位相空間 X が以下を満たすとき, CW 複体という.

- (1) X^0 を X の離散部分空間とし, 0 胞体という.
- (2) X^{k+1} は帰納的に接着写像とよばれる連続写像 $(\varphi_i)_{i \in I_k}: \coprod_{i \in I_k} S^k \rightarrow X^k$ と包含写像 $i: \coprod_{i \in I_k} S^k \hookrightarrow \coprod_{i \in I_k} D^{k+1}$ の押し出しとして得られる.



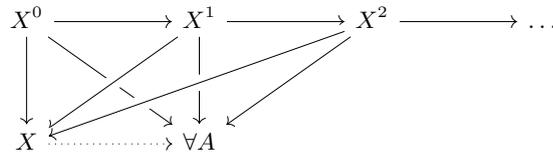
- (3) X は図式

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$$

の余極限として得られ, 弱位相をもつ. つまり,

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ に対し, } A \cap X^n \subset X^n \text{ は開集合}$$

が成立する.

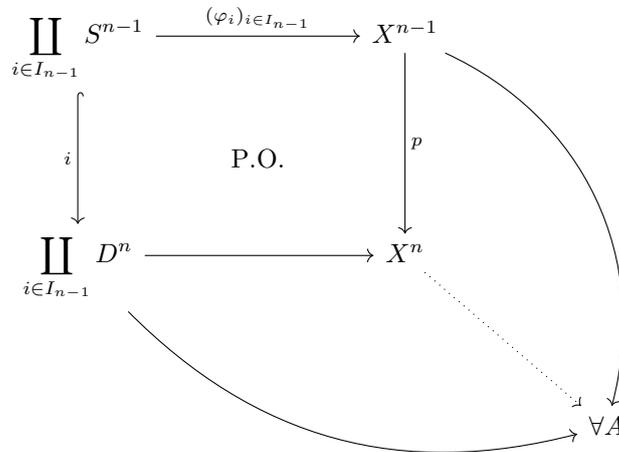


$D^n \hookrightarrow \coprod_{i \in I_n} D^n \longrightarrow X^n \longrightarrow X$ を特性写像, X^n を n 骨格といい, $X = X^n$ となる最小の n を

X の次元*2という. また, CW 複体の構成は一意でなく様々な構成が存在する.

有限次元の CW 複体は自然に弱位相をもつため (3) の弱位相の条件は不要である.

実際, $A \subset X = X^n$ を開集合とすると, 押し出し



により得られる写像 $p: X^{n-1} \rightarrow X^n$ の連続性より, $p^{-1}(A) = A \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$ は開集合である. これを帰納的に繰り返すと, 任意の k に対し, $A \cap X^k \subset X^k$ は開集合である.

逆に任意の k に対し, $A \cap X^k \subset X^k$ は開集合であるとすると, $A = A \cap X^n \subset X^n = X$ は開集合である. よって有限次元 CW 複体は弱位相をもつ.

CW 複体の位相は特性写像によって特徴付けられる. つまり, 以下が成立する.

Proposition 1.2

CW 複体 X に対し,

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の特性写像} \Phi: D^n \rightarrow X \text{ に対し, } \Phi^{-1}(A) \subset D^n \text{ は開集合}$$

Proof:

\Rightarrow

Φ の連続性より従う.

\Leftarrow

X^0 は X の離散部分空間なので $A \cap X^0 \subset X^0$ は開集合である. ここで, $A \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$ は開集合と仮定する. このとき, $A \cap X^n \subset X^n$ は開集合なので, 帰納法より, 任意の n に対し, $A \cap X^n \subset X^n$ は開集合である. X は弱位相をもつため, $A \subset X$ は開集合である.

*2 胞体の最大次元と一致する.



同様に,

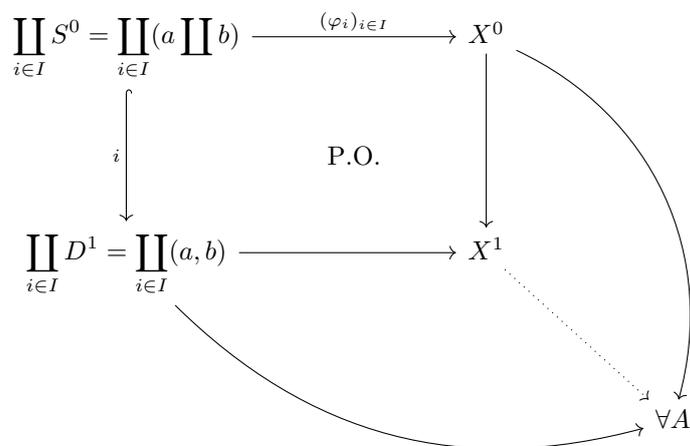
$A \subset X$ は閉集合 \Leftrightarrow 任意の特性写像 $\Phi: D^n \rightarrow X$ に対し, $\Phi^{-1}(A) \subset D^n$ は閉集合

が成立する.

Example 1.3

グラフは 1 次元 CW 複体である.

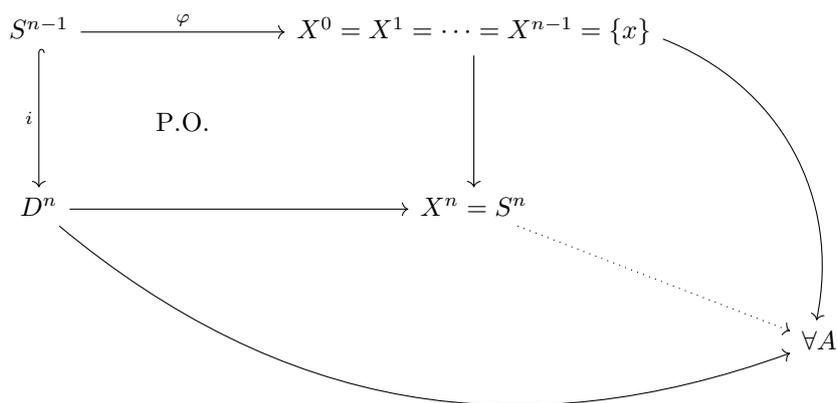
実際, グラフは 0 胞体 (頂点) と 1 胞体 (辺) をもつ CW 複体である.



Example 1.4

S^n は CW 複体である.

実際, S^n は 0 胞体 (S^n の 1 点) と n 胞体 ($\text{Int } D^n$) をもつ CW 複体である.*3

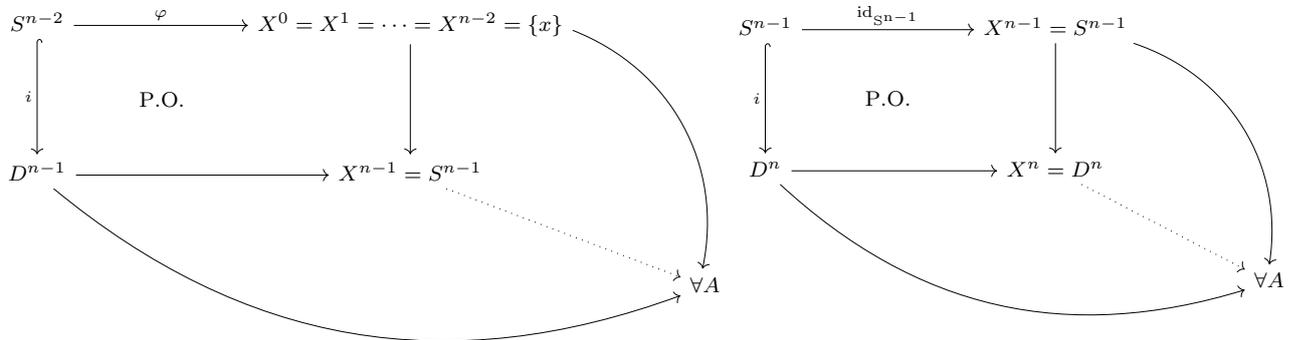


Example 1.5

D^n は CW 複体である.

*3 S^n を $D^n / \partial D^n$ とみなすことと同等である.

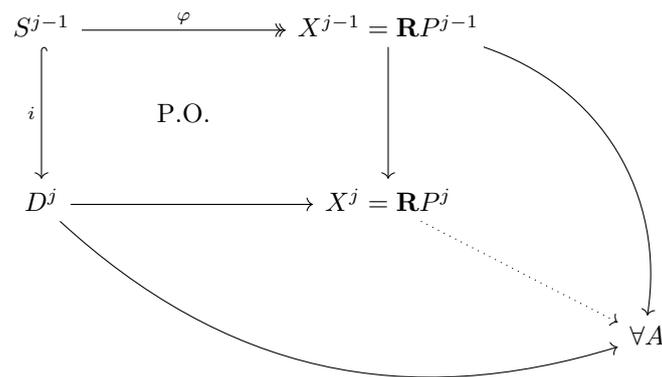
実際, D^n は 0 胞体 (S^n の 1 点) と $n-1$ 胞体 ($\text{Int } D^{n-1}$) と n 胞体 ($\text{Int } D^n$) をもつ CW 複体である.



Example 1.6

$\mathbf{R}P^n$ は CW 複体である。

実際, 0 胞体, 1 胞体, ..., n 胞体 ($\mathbf{R}P^0, \text{Int } D^1, \dots, \text{Int } D^n$) をもつ CW 複体である.*4



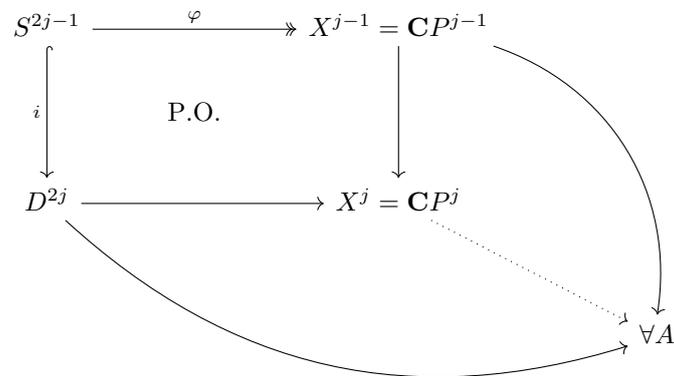
Example 1.7

$\mathbf{C}P^n$ は CW 複体である。

実際, 0 胞体, 2 胞体, ..., $2n-2$ 胞体, $2n$ 胞体 ($\mathbf{C}P^0, \text{Int } D^2, \dots, \text{Int } D^{2n}$) をもつ CW 複体である.*5

*4 $\mathbf{R}P^n$ を S^n 上に $x \sim -x$ で定まる同値関係による商集合 S^n / \sim とみなすことと同等である.

*5 $\mathbf{C}P^n$ を S^{2n+1} 上に $x \sim \lambda x$ ($|\lambda| = 1$) で定まる同値関係による商集合 S^{2n+1} / \sim とみなすことと同等である.



Definition 1.8 (部分複体, CW 対)

X を CW 複体とする. X の部分空間で胞体の和集合で表される A であり, 任意の A の胞体の閉包が A に含まれるものを X の部分複体といい, (X, A) を CW 対という.

CW 複体の部分複体は CW 複体となる.*6また, 各骨格は部分複体である.

Example 1.9

CW 複体 $\mathbf{R}P^n$ に対し, $\mathbf{R}P^i$ ($i \leq n$) は部分複体である.

Example 1.10

CW 複体 $\mathbf{C}P^n$ に対し, $\mathbf{C}P^i$ ($i \leq n$) は部分複体である.

胞体はコンパクトであり, 有限個のコンパクト集合の直和の商空間はコンパクトであるため, 有限 CW 複体*7はコンパクトである. 逆に以下が成立する.

Proposition 1.11

CW 複体 X のコンパクト部分空間 C はある有限部分複体に含まれる.

Proof:

$(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ を全て異なる胞体に属する C の無限点列とし, $S := \{x_1, x_2, \dots\}$ とする.

まず, 帰納法を用いて, $S \subset X$ が閉集合であることを示す. X^0 は離散空間なので, $S \cap X^0 \subset X^0$ は閉集合である. ここで, $k \leq n-1$ に対し, $S \cap X^k \subset X^k$ が閉集合だと仮定するとこれと接着写像の連続性より, S の任意の接着写像の逆像は閉集合である. よって, S の任意の特性写像の逆像は閉集合であり, $S \cap X^n \subset X^n$ は閉集合である. したがって, 帰納法により, 任意の n に対し, $S \cap X^n \subset X^n$ は閉集合である. また, X は弱位相をもつため, $S \subset X$ は閉集合である.

同様に S の任意の部分集合も閉集合であることが従うため, S は離散位相をもつ. また, コンパクト空間 C の閉部分空間 S はコンパクトであり, 離散位相をもつ S がコンパクト集合なので S は有限集合である.

以上により, C は有限個の胞体の和集合に含まれる. よって, この有限個の胞体の和集合が X の有限部分複体に含まれることを示せば良いが, 有限部分複体の有限個の和集合は有限部分複体なので 1 つの胞体が有限部分複体に含まれることを示せば良い.

k 胞体の接着写像の像はコンパクト集合であるため, 有限個の $k-1$ 胞体と交わる. これを帰納的に考えると, k 胞体の接着写像の像は有限個の l 胞体と交わる ($l \leq k-1$). よって, この像は有限部分複体に含まれる. したがって, k 胞体は有限部分複体に含まれる.

*6 骨格の構成は明らかであり, 弱位相をもつことは任意の n に対し, $A^n = A \cap X^n$ が成立することより従う.

*7 有限個の胞体からなる CW 複体を有限 CW 複体という.



CW 複体の「CW」とは、以下が成立することから名付けられた。

Closure finiteness

任意の胞体の閉包は有限個のみの胞体と交わる。

Weak topology

胞体の閉包による閉被覆に関し、弱位相をもつ。つまり、

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ 胞体 } e^n \text{ に対し, } A \cap \overline{e^n} \subset D^n \text{ は開集合}$$

が成立する。

Whitehead はこれらの 2 つの性質に注目して CW 複体の定義を与えた。実際以下のように CW 複体は特徴付けることができる。

Proposition 1.12

ハウスドルフ空間 X と連続写像 $\Phi: D^n \rightarrow X$ の族が与えられ、以下を満たすとき、 X は CW 複体であり、 Φ は特性写像である。

(1) Φ は同相 $\text{Int} D^n \cong \Phi(\text{Int} D^n)$ を誘導し、 X は胞体により直和分解される。つまり、 $\coprod e^n = X$ が成立する。

(2) 任意の胞体 e^n に対し、 $\Phi(\partial D^n) \subset \bigcup_{n>i, \text{finite}} e^i$ が成立する。

(3) $A \subset X$ は開集合 \Leftrightarrow 任意の n 胞体 e^n に対し、 $A \cap \overline{e^n} \subset D^n$ は開集合

が成立する。

逆に、CW 複体と特性写像は (1),(2),(3) を満たす。

Proof:

CW 複体と特性写像は (1),(2),(3) を満たすことは明らかなので、(1),(2),(3) を満たす X と Φ が CW 複体と特性写像であることを示す。

X^{n-1} を l 胞体 ($l < n$) 全ての和集合とし、連続全射 $f: X^{n-1} \coprod (\coprod D^n) \rightarrow X^n$ を以下で定める。

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X^{n-1} \\ \Phi(x) & x \in D^n \end{cases}$$

この f が商写像であることを示せば X^n は X^{n-1} に接着写像で n 胞体を貼り付けて得られることがわかる。つまり、 $C \subset X^n$ に対し、 $f^{-1}(C)$ が閉集合と仮定し、 C が閉集合であることを示せば良いが、(3) より、任意の胞体 e^m に対し、 $C \cap \overline{e^m} \subset D^m$ が閉集合であることを示せば良いことがわかる。

$m < n$ のとき、仮定より、 $f^{-1}(C) = (C \cap X^{n-1}) \coprod \Phi^{-1}(C)$ は閉集合なので、 $C \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$ は閉集合である。よって、 $C \cap X^{n-1} \cap \overline{e^m} = C \cap \overline{e^m} \subset D^m$ は閉集合である。

$m = n$ のとき、 $f^{-1}(C) \cap D^n \subset D^n$ は閉集合であり、コンパクト集合である。よって、連続写像の像はコンパクトであるため、 $C \cap \overline{e^n}$ はコンパクト集合であり、ハウスドルフ性より、閉集合である。

$m > n$ のとき、 $C \subset X^n$ と (2) より、 $C \cap \overline{e^m} \subset \Phi(\partial D^m) \subset \bigcup_{m>i, \text{finite}} \overline{e^i}$ となり、 m に関する帰納法より、 $C \cap \overline{e^i}$ は閉集

合である。よって、 $\bigcup_{m>i, \text{finite}} (C \cap \overline{e^i}) = C \cap \left(\bigcup_{m>i, \text{finite}} \overline{e^i} \right)$ は閉集合である。したがって、 $C \cap \left(\bigcup_{m>i, \text{finite}} \overline{e^i} \right) \cap \overline{e^m} = C \cap \overline{e^m}$ は閉集合である。

次に,

$$A \subset X \text{ は閉集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ に対し, } A \cap X^n \subset X^n \text{ は閉集合}$$

が成立することを示す.

\Rightarrow

上の議論を $C = X^n$ とすれば, X^n は閉集合であるため, 任意の n に対し, $A \cap X^n \subset X^n$ は閉集合である.

\Leftarrow

上の議論と同様に従う. ■

次に, CW 複体 X の部分集合 A の開近傍 $N_\varepsilon(A)$ について考える.

$N_\varepsilon(A)$ は以下のように帰納的に定義される.

まず, $N_\varepsilon^0 := A \cap X^0$ とする. 次に, $A \cap X^n \subset X^n$ の開近傍 $N_\varepsilon^n(A)$ が定義されているとし, 各 $n+1$ 胞体に関する特性写像 $\Phi: D^{n+1} \rightarrow X$ の逆像を用いて, $A \cap X^{n+1} \subset X^{n+1}$ の開近傍 $N_\varepsilon^{n+1}(A)$ を定義する. 正確には, $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ を $\Phi^{-1}(A) \setminus \partial D^{n+1} \subset D^{n+1} \setminus \partial D^{n+1}$ の開近傍と $(1-\varepsilon, 1] \times \Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ の和集合と定義する. そして, $N_\varepsilon(A) := \bigcup_n N_\varepsilon^n(A)$ と定義する.*8

Proposition 1.13

CW 複体は正規空間である.

Proof:

任意の特性写像による 1 点集合の逆像は閉集合であるため, 1 点集合は閉集合である.

次に, 交わらない閉集合 A, B が十分小さな $\varepsilon > 0$ をとることにより, 開近傍 $N_\varepsilon(A), N_\varepsilon(B)$ で分離できることを示す. 交わらない開近傍 $N_\varepsilon^n(A), N_\varepsilon^n(B)$ が構成されるとすると, 特性写像 $\Phi: D^{n+1} \rightarrow X$ に対し, $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ と $\Phi^{-1}(B)$ は交わらない. 実際, 交わるとすると, コンパクト集合 D^{n+1} の部分閉集合 $\Phi^{-1}(B)$ はコンパクト集合であり, 点列コンパクト性より, $\Phi^{-1}(B)$ の点列で $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A)) \cap \Phi^{-1}(B)$ の点に収束するものが取れる. しかし, これは, $N_\varepsilon^n(A)$ と $N_\varepsilon^n(B)$ が交わらないことに矛盾する. 同様に, $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$ と $\Phi^{-1}(A)$ は交わらないことがわかる. また, A と B は交わらないため, $\Phi^{-1}(A)$ と $\Phi^{-1}(B)$ は交わらない. したがって, $N_\varepsilon(A)$ と $N_\varepsilon(B)$ は交わらないことがわかる. ■

参考文献

- [1] Allen Hatcher(著)・「Algebraic Topology」・Cambridge University Press・2001
- [2] J. P. P. May(著)・「A Concise Course in Algebraic Topology」・University of Chicago Press・1999
- [3] <https://ncatlab.org/nlab/show/CW+complex>

*8 任意の特性写像による $N_\varepsilon(A)$ の逆像は開集合なので, $N_\varepsilon(A)$ は開集合である.