CW 複体

ゐぶ

概要

多様体など重要な空間が CW 複体となるため, 古い代数的トポロジーの本では, CW 複体を「空間」と考えているものが多い.[*1] 本稿では CW 複体を定義し, 例をあげ, 様々な性質を示す.

1 定義と例

位相空間の圏は余完備なので, X を位相空間とし, $\varphi\colon S^{n-1} \to X$ を連続写像とすると, φ と包含写像 $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ の押し出し $X \cup_\varphi D^n$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X \cup_\varphi D^n \arrow[dr, dotted] & \\
 & & \forall A
\end{tikzcd}
$$

この方法により, S^n を得ることができる.

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & D^n \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & S^n \arrow[dr, dotted] & \\
 & & \forall A
\end{tikzcd}
$$

[*1] 現代ではモデル圏の理論が整備され, CW 複体より単体的集合を用いるようになってきた.

$(\phi_i\colon S^{n-1}\to X)_{i\in I}$ を連続写像の族とすると, 連続写像 $(\varphi_i)_{i\in I}\colon \coprod_{i\in I} S^{n-1}\to X$ を得る．よって, $(\varphi_i)_{i\in I}$ と包含写像 $i\colon \coprod_{i\in I} S^{n-1}\hookrightarrow \coprod_{i\in I} D^n$ の押し出し $X\cup_{(\varphi_i)_{i\in I}}\coprod_{i\in I} D^n$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} S^{n-1} \arrow[r, "(\varphi_i)_{i\in I}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod_{i\in I} D^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X\cup_{(\varphi_i)_{i\in I}}\coprod_{i\in I} D^n \arrow[dr, dotted] & \\
 & & \forall A
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.1 (CW 複体)

位相空間 X が以下を満たすとき, CW 複体という.

(1) X^0 を X の離散部分空間とし, 0 胞体という.

(2) X^{k+1} は帰納的に接着写像とよばれる連続写像 $(\varphi_i)_{i\in I_k}\colon \coprod_{i\in I_k} S^k\to X^k$ と包含写像 $i\colon \coprod_{i\in I_k} S^k\hookrightarrow \coprod_{i\in I_k} D^{k+1}$ の押し出しとして得られる.

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I_k} S^{k} \arrow[r, "(\varphi_i)_{i\in I_k}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^k \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod_{i\in I_k} D^{k+1} \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^{k+1} \arrow[dr, dotted] & \\
 & & \forall A
\end{tikzcd}
$$

(3) X は図式

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$$

の余極限として得られ, 弱位相をもつ. つまり,

$$A\subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ に対し, } A\cap X^n\subset X^n \text{は開集合}$$

が成立する.

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & X^1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & X^2 \arrow[r] \arrow[dll] \arrow[dl] & \cdots \\
X \arrow[r, dotted] & \forall A & &
\end{tikzcd}$$

$D^n \hookrightarrow \coprod_{i\in I_n} D^n \longrightarrow X^n \longrightarrow X$ を特性写像, X^n を n 骨格といい, $X = X^n$ となる最小の n を X の次元[*2]という. また, CW 複体の構成は一意でなく様々な構成が存在する.

有限次元の CW 複体は自然に弱位相をもつため (3) の弱位相の条件は不要である.
実際, $A \subset X = X^n$ を開集合とすると, 押し出し

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I_{n-1}} S^{n-1} \arrow[r, "(\varphi_i)_{i\in I_{n-1}}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^{n-1} \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod_{i\in I_{n-1}} D^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^n \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}$$

により得られる写像 $p\colon X^{n-1} \to X^n$ の連続性より, $p^{-1}(A) = A \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$ は開集合である. これを帰納的に繰り返すと, 任意の k に対し, $A \cap X^k \subset X^k$ は開集合である.
逆に任意の k に対し, $A \cap X^k \subset X^k$ は開集合であるとすると, $A = A \cap X^n \subset X^n = X$ は開集合である. よって有限次元 CW 複体は弱位相をもつ.

CW 複体の位相は特性写像によって特徴付けられる. つまり, 以下が成立する.

Proposition 1.2

CW 複体 X に対し,

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の特性写像} \Phi\colon D^n \to X \text{ に対し,}\ \Phi^{-1}(A) \subset D^n \text{は開集合}$$

Proof:

$\Rightarrow$

Φ の連続性より従う.

$\Leftarrow$

X^0 は X の離散部分空間なので $A \cap X^0 \subset X^0$ は開集合である. ここで, $A \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$ は開集合と仮定する. このとき, $A \cap X^n \subset X^n$ は開集合なので, 帰納法より, 任意の n に対し, $A \cap X^n \subset X^n$ は開集合である. X は弱位相をもつため, $A \subset X$ は開集合である.

[*2] 胞体の最大次元と一致する.

■

同様に,

$$A \subset X \text{ は閉集合} \Leftrightarrow \text{任意の特性写像}\Phi\colon D^n \to X \text{ に対し, } \Phi^{-1}(A) \subset D^n \text{は閉集合}$$

が成立する.

Example 1.3

グラフは 1 次元 CW 複体である.

実際, グラフは 0 胞体 (頂点) と 1 胞体 (辺) をもつ CW 複体である.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} S^0 = \coprod_{i\in I}(a \coprod b) \arrow[r, "(\varphi_i)_{i\in I}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^0 \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod_{i\in I} D^1 = \coprod_{i\in I}(a,b) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^1 \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}$$

Example 1.4

S^n は CW 複体である.

実際, S^n は 0 胞体 (S^nの 1 点) と n 胞体 (Int D^n) をもつ CW 複体である.[*3]

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^0 = X^1 = \cdots = X^{n-1} = \{x\} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^n = S^n \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}$$

Example 1.5

D^n は CW 複体である.

[*3] S^n を $D^n/\partial D^n$ とみなすことと同等である.

実際, D^n は 0 胞体 (S^nの 1 点) と $n-1$ 胞体 (Int D^{n-1}) と n 胞体 (Int D^n) をもつ CW 複体である.

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-2} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^0 = X^1 = \cdots = X^{n-2} = \{x\} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^{n-1} \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^{n-1} = S^{n-1} \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\mathrm{id}_{S^{n-1}}"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^{n-1} = S^{n-1} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^n \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^n = D^n \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}
$$

Example 1.6

$\mathbf{R}P^n$ は CW 複体である。

実際, 0 胞体 , 1 胞体, . . . , n 胞体 ($\mathbf{R}P^0$, Int $D^1, \ldots,$ Int D^n) をもつ CW 複体である.[4]

$$
\begin{tikzcd}
S^{j-1} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & X^{j-1} = \mathbf{R}P^{j-1} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^j \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^j = \mathbf{R}P^j \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}
$$

Example 1.7

$\mathbf{C}P^n$ は CW 複体である。

実際, 0 胞体, 2 胞体, . . . , $2n-2$ 胞体, $2n$ 胞体 ($\mathbf{C}P^0$, Int $D^2, \ldots,$ Int D^{2n}) をもつ CW 複体である.[5]

---

[4] $\mathbf{R}P^n$ を S^n 上に $x \sim -x$ で定まる同値関係による商集合 $S^n/\sim$ とみなすことと同等である.

[5] $\mathbf{C}P^n$ を S^{2n+1} 上に $x \sim \lambda x$ ($|\lambda| = 1$) で定まる同値関係による商集合 $S^{2n+1}/\sim$ とみなすことと同等である.

$$
\begin{tikzcd}
S^{2j-1} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.O.}"] & X^{j-1} = \mathbf{C}P^{j-1} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
D^{2j} \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X^{j} = \mathbf{C}P^{j} \arrow[dr, dotted] & \\
& & \forall A
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.8 (部分複体,*CW* 対)

X を CW 複体とする. X の部分空間で胞体の和集合で表される A であり, 任意の A の胞体の閉包が A に含まれるものを X の部分複体といい, (X, A) を CW 対という.

CW 複体の部分複体は CW 複体となる.*6 また, 各骨格は部分複体である.

Example 1.9

CW 複体 $\mathbf{R}P^n$ に対し, $\mathbf{R}P^i \quad (i \leq n)$ は部分複体である.

Example 1.10

CW 複体 $\mathbf{C}P^n$ に対し, $\mathbf{C}P^i \quad (i \leq n)$ は部分複体である.

胞体はコンパクトであり, 有限個のコンパクト集合の直和の商空間はコンパクトであるため, 有限 CW 複体*7 はコンパクトである. 逆に以下が成立する.

Proposition 1.11

CW 複体 X のコンパクト部分空間 C はある有限部分複体に含まれる.

Proof:

$(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ を全て異なる胞体に属する C の無限点列とし, $S := \{x_1, x_2, \dots\}$ とする.
まず, 帰納法を用いて, $S \subset X$ が閉集合であることを示す. X^0 は離散空間なので, $S \cap X^0 \subset X^0$ は閉集合である. ここで, $k \leq n-1$ に対し, $S \cap X^k \subset X^k$ が閉集合だと仮定するとこれと接着写像の連続性より, S の任意の接着写像の逆像は閉集合である. よって, S の任意の特性写像の逆像は閉集合であり, $S \cap X^n \subset X^n$ は閉集合である. したがって, 帰納法により, 任意の n に対し, $S \cap X^n \subset X^n$ は閉集合である. また, X は弱位相をもつため, $S \subset X$ は閉集合である.
同様に S の任意の部分集合も閉集合であることが従うため, S は離散位相をもつ. また, コンパクト空間 C の閉部分空間 S はコンパクトであり, 離散位相をもつ S がコンパクト集合なので S は有限集合である.
以上により, C は有限個の胞体の和集合に含まれる. よって, この有限個の胞体の和集合が X の有限部分複体に含まれることを示せば良いが, 有限部分複体の有限個の和集合は有限部分複体なので 1 つの胞体が有限部分複体に含まれることを示せば良い.
k 胞体の接着写像の像はコンパクト集合であるため, 有限個の $k-1$ 胞体と交わる. これを帰納的に考えると, k 胞体の接着写像の像は有限個の l 胞体と交わる $(l \leq k-1)$. よって, この像は有限部分複体に含まれる. したがって, k 胞体は有限部分複体に含まれる.

*6 骨格の構成は明らかであり, 弱位相をもつことは任意の n に対し, $A^n = A \cap X^n$ が成立することより従う.
*7 有限個の胞体からなる CW 複体を有限 CW 複体という.

$\blacksquare$

CW 複体の「CW」とは, 以下が成立することから名付けられた.

Closure finiteness

任意の胞体の閉包は有限個のみの胞体と交わる.

Weak topology

胞体の閉包による閉被覆に関し, 弱位相をもつ. つまり,

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ 胞体 } e^n \text{に対し, } A \cap \overline{e^n} \subset D^n \text{は開集合}$$

が成立する.

Whitehead はこれらの 2 つの性質に注目して CW 複体の定義を与えた. 実際以下のように CW 複体は特徴付けることができる.

Proposition 1.12

ハウスドルフ空間 X と連続写像 $\Phi\colon D^n \to X$ の族が与ええられ, 以下を満たすとき, X は *CW* 複体であり, Φ は特性写像である.

(1) Φ は同相 $\mathrm{Int}D^n \cong \Phi(\mathrm{Int}D^n)$ を誘導し, X は胞体により直和分解される. つまり, $\coprod e^n = X$ が成立する.

(2) 任意の胞体 e^n に対し, $\Phi(\partial D^n) \subset \bigcup_{n>i,\mathrm{finite}} e^i$ が成立する.

(3)

$$A \subset X \text{ は開集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ 胞体 } e^n \text{に対し, } A \cap \overline{e^n} \subset D^n \text{は開集合}$$

が成立する.

逆に, *CW* 複体と特性写像は *(1),(2),(3)* を満たす.

Proof:

CW 複体と特性写像は (1),(2),(3) を満たすことは明らかなので, (1),(2),(3) を満たす X と Φ が CW 複体と特性写像であることを示す.

X^{n-1} を l 胞体 $(l < n)$ 全ての和集合とし, 連続全射 $f\colon X^{n-1} \coprod \left(\coprod D^n\right) \to X^n$ を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X^{n-1} \\ \Phi(x) & x \in D^n \end{cases}$$

この f が商写像であることを示せば X^n は X^{n-1} に接着写像で n 胞体を貼り付けて得られることがわかる. つまり, $C \subset X^n$ に対し, $f^{-1}(C)$ が閉集合と仮定し, C が閉集合であることを示せば良いが, (3) より, 任意の胞体 e^m に対し, $C \cap \overline{e^m} \subset D^m$ が閉集合であることを示せば良いことがわかる.

$m < n$ のとき, 仮定より, $f^{-1}(C) = (C \cap X^{n-1}) \coprod \Phi^{-1}(C)$ は閉集合なので, $C \cap X^{n-1} \subset X^{n-1}$ は閉集合である. よって, $C \cap X^{n-1} \cap \overline{e^m} = C \cap \overline{e^m} \subset D^m$ は閉集合である.

$m = n$ のとき, $f^{-1}(C) \cap D^n \subset D^n$ は閉集合であり, コンパクト集合である. よって, 連続写像の像はコンパクトであるため, $C \cap \overline{e^n}$ はコンパクト集合であり, ハウスドルフ性より, 閉集合である.

$m > n$ のとき, $C \subset X^n$ と (2) より, $C \cap \overline{e^m} \subset \Phi(\partial D^m) \subset \bigcup_{m>i,\mathrm{finite}} \overline{e^i}$ となり, m に関する帰納法より, $C \cap \overline{e^i}$ は閉集合である. よって, $\bigcup_{m>i,\mathrm{finite}} (C \cap \overline{e^i}) = C \cap \left(\bigcup_{m>i,\mathrm{finite}} \overline{e^i}\right)$ は閉集合である. したがって, $C \cap \left(\bigcup_{m>i,\mathrm{finite}} \overline{e^i}\right) \cap \overline{e^m} = C \cap \overline{e^m}$ は閉集合である.

次に,

$$A \subset X \text{ は閉集合} \Leftrightarrow \text{任意の } n \text{ に対し, } A \cap X^n \subset X^n \text{は閉集合}$$

が成立することを示す.

$\Rightarrow$

上の議論を $C = X^n$ とすれば, X^n は閉集合であるため, 任意の n に対し, $A \cap X^n \subset X^n$ は閉集合である.

$\Leftarrow$

上の議論と同様に従う. ■

次に, CW 複体 X の部分集合 A の開近傍 $N_\varepsilon(A)$ について考える.
$N_\varepsilon(A)$ は以下のように帰納的に定義される.
まず, $N_\varepsilon^0 := A \cap X^0$ とする. 次に, $A \cap X^n \subset X^n$ の開近傍 $N_\varepsilon^n(A)$ が定義されているとし, 各 $n+1$ 胞体に関する特性写像 $\Phi\colon D^{n+1} \to X$ の逆像を用いて, $A \cap X^{n+1} \subset X^{n+1}$ の開近傍 $N_\varepsilon^{n+1}(A)$ を定義する. 正確には, $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^{n+1}(A))$ を $\Phi^{-1}(A) \setminus \partial D^{n+1} \subset D^{n+1} \setminus \partial D^{n+1}$ の開近傍と $(1-\varepsilon, 1] \times \Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ の和集合と定義する. そして, $N_\varepsilon(A) := \bigcup_n N_\varepsilon^n(A)$ と定義する.[*8]

Proposition 1.13

CW 複体は正規空間である.

Proof:

任意の特性写像による 1 点集合の逆像は閉集合であるため, 1 点集合は閉集合である.
次に, 交わらない閉集合 A, B が十分小さな $\varepsilon > 0$ をとることにより, 開近傍 $N_\varepsilon(A), N_\varepsilon(B)$ で分離できることを示す.
交わらない開近傍 $N_\varepsilon^n(A), N_\varepsilon^n(B)$ が構成されてるとすると, 特性写像 $\Phi\colon D^{n+1} \to X$ に対し, $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A))$ と $\Phi^{-1}(B)$ は交わらない. 実際, 交わってるとすると, コンパクト集合 D^{n-1} の部分閉集合 $\Phi^{-1}(B)$ はコンパクト集合であり, 点列コンパクト性より, $\Phi^{-1}(B)$ の点列で $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(A)) \cap \Phi^{-1}(B)$ の点に収束するものが取れる. しかし, これは, $N_\varepsilon^n(A)$ と $N_\varepsilon^n(B)$ が交わらないことに矛盾する. 同様に, $\Phi^{-1}(N_\varepsilon^n(B))$ と $\Phi^{-1}(A)$ は交わらないことがわかる. また, A と B は交わらないため, $\Phi^{-1}(A)$ と $\Phi^{-1}(B)$ は交わらない. したがって, $N_\varepsilon^n(A)$ と $N_\varepsilon^n(B)$ は交わらないことがわかる. ■

参考文献

[1] Allen Hatcher(著)・「Algebraic Topology」・Cambridge University Press・2001

[2] J. P. P. May (著)・「A Concise Course in Algebraic Topology」・University of Chicago Press・1999

[3] https://ncatlab.org/nlab/show/CW+complex

[*8] 任意の特性写像による $N_\varepsilon(A)$ の逆像は閉集合なので, $N_\varepsilon(A)$ は開集合である.