蛇の補題とコホモロジー長完全列

@cosmos8128　@kyo_math1729

概要

アーベル圏では埋め込み定理を用いて元を取って議論することができるが本稿ではそうではなく普遍性の議論で蛇の補題とコホモロジー長完全列の存在を示す. @cosmos8128 が 1 章と 2 章でアーベル圏の基本的な性質をまとめ, 蛇の補題を示す. その後@kyo_math1729 が 3 章でコホモロジー長完全列の存在を示す.

1　アーベル圏の性質

まず, アーベル圏の基本的な性質をまとめる.

Definition 1.1 (カルテシアン, コカルテシアン)

完備かつ余完備な圏 $\mathscr{A}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

が $X \simeq A \prod_{Y} B$ を満たすとき, カルテシアンといい, $Y \simeq A \coprod_{X} B$ を満たすとき, コカルテシアンという.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.B.}"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

アーベル圏 $\mathscr{A}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

がカルテシアンであることと図式

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(g',f')} A \oplus B \xrightarrow{(f,-g)} Y$$

が完全列であることは同値であり, アーベル圏 $\mathscr{A}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

がコカルテシアンであることと図式

$$X \xrightarrow{(g',f')} A \oplus B \xrightarrow{(f,-g)} Y \longrightarrow 0$$

が完全列であることは同値である.

Lemma 1.2

アーベル圏 $\mathscr{A}$ の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

がカルテシアンのとき, $\mathrm{Ker}\ f \simeq \mathrm{Ker}\ f'$ が成立する. また, コカルテシアンのとき, $\mathrm{Coker}\ f \simeq \mathrm{Coker}\ f'$ が成立する.

Proof: 任意の $S \in \mathscr{A}$ に対し, 核と引き戻しの普遍性より,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S, \mathrm{Ker}\ f) &\simeq \mathrm{Ker}(\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,A) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,Y)) && \text{(核の普遍性)} \\ &\simeq \mathrm{Ker}(\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,A) \prod_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,B)) && \text{(引き戻しの普遍性)} \\ &\simeq \mathrm{Ker}(\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,X) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S,B)) && \text{(引き戻しの普遍性)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(S, \mathrm{Ker}\ f') && \text{(核の普遍性)} \end{aligned}$$

が成立する. よって米田の補題より, $\mathrm{Ker}\ f \simeq \mathrm{Ker}\ f'$ が成立する.
双対を考えると, コカルテシアンのとき, $\mathrm{Coker}\ f \simeq \mathrm{Coker}\ f'$ が成立する. ■

Lemma 1.2 より以下が従う.

Lemma 1.3

アーベル圏 $\mathscr{A}$ の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

がカルテシアンであり, f がエピ射であるとき, コカルテシアンであり, f' はエピ射である. また, コカルテシアンであり, f' がモノであるとき, カルテシアンであり, f はモノである.

Lemma 1.4

$\mathscr{A}$ をアーベル圏とする. 複体

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

に対し, 以下は同値である.

(i) 複体

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

は完全列である.

(ii) 任意の射 $S \xrightarrow{h} X$ で $g \circ h = 0$ を満たすものに対し, エピ射 $S' \xrightarrow{\widehat{f}} S$ が存在し, 以下の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads, "\exists \widehat{f}"] \arrow[d] & S \arrow[d, "\forall h"] \arrow[dr, "0"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Proof: まず (i)⇒(ii) を示す. 核の普遍性より, 以下の図式を可換にする一意な射 $S \longrightarrow \mathrm{Ker}\ g$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "\forall h"] \arrow[drr, "0"] & & \\ \mathrm{Ker}\ g \arrow[r, tail, "\ker\ g"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

また, (i) よりエピ射 $X \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\ g$ が存在する. ここで, $S' := X \prod_{\mathrm{Ker}\ g} S$ とすると, **Lemma 1.3** より, エピ射 $S' \xrightarrow{\widehat{f}} S$ が存在し, 以下の図式は可換になる.

$$
\begin{tikzcd}
S' := X \prod_{\mathrm{Ker}\ g} S \arrow[r, two heads, "\widehat{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.B.}"] & S \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "\forall h"] \arrow[drr, "0"] & & \\
X \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathrm{Ker}\ g \arrow[r, tail, "\ker\ g"] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

次に (ii)⇒(i) を示す. 核の普遍性より以下の図式を可換にする一意な射 $X \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}\ g$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dotted, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, "0"] & & \\
\mathrm{Ker}\ g \arrow[r, tail, "\ker\ g"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

ここで, $S = \mathrm{Ker}\ g,\ h = \ker\ g$ とすると (ii) より以下の図式が可換になるようなエピ射 $S' \overset{\widehat{f}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Ker}\ g$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, two heads, "\widehat{f}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ g \arrow[d, tail, "\ker\ g"] \arrow[dr, "0"] & \\
X \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

よって, 射 $S' \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}\ g$ はエピ射である. したがって, 射 $X \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}\ g$ はエピ射である. つまり, 複体

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

は完全列である. ■

2 蛇の補題

では, 蛇の補題を示す.

Theorem 2.1 (蛇の補題)

アーベル圏の各行が完全な可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' &
\end{tikzcd}$$

に対し, 完全列

$$\mathrm{Ker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f'}} \mathrm{Coker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g'}} \mathrm{Coker}\ w$$

が存在する.

Proof: まず, 射 $\mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u$ を構成する. $W := Y \coprod_{Z} \mathrm{Ker}\ w$ とする. 完全性より, 射 $Y \xrightarrow{g} Z$ はエピ射であるため, **Lemma 1.3** より, 射 $W \xrightarrow{h} \mathrm{Ker}\ w$ はエピ射であり以下の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d] \arrow[ddr, "0"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.B.}"] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' &
\end{tikzcd}$$

Lemma 1.2 より, $\mathrm{Ker}\ h \simeq \mathrm{Ker}\ g$ が成立し, 完全性より, 射 $X \longrightarrow \mathrm{Ker}\ g$ はエピ射であり, $X' \xrightarrow{f'} Y'$ はモノ射であり, $X' \simeq \mathrm{Ker}\ g'$ である. よって, 核の普遍性より以下の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\ h \arrow[r, tail, "\ker\ h"] \arrow[d, "\simeq"'] & W \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d] \arrow[ddr, "0"] \arrow[dl, dotted, shift left] \arrow[dr, phantom, "\text{P.B.}"] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
X \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "u"'] & \mathrm{Ker}\ g \arrow[r, tail, "\ker\ g"] \arrow[d] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \simeq \mathrm{Ker}\ g' \arrow[r, tail, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' &
\end{tikzcd}$$

$V := Y' \coprod_{X'} \mathrm{Coker}\ u$ とすると, **Lemma 1.3** より, $\mathrm{Coker}\ u \longrightarrow V$ はモノ射であり, 余核の性質より, 以下の図

式は可換になる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\ h \arrow[r, tail, "\mathrm{ker}\ h"] \arrow[d, "\simeq"'] & W \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d] \arrow[dl, "0"] \arrow[ddl, "0"] \arrow[drr, "0"] \arrow[r, phantom, shift right=8ex, "\text{P.B.}"] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
X \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom] \arrow[r] \arrow[dr, "u"] \arrow[ddr, "0"'] & \mathrm{Ker}\ g \arrow[r, tail, "\mathrm{ker}\ g"] \arrow[d] \arrow[dd, bend left] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, tail, "f'"'] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coker}\ u"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.O.}"] & Y' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & Z' \arrow[d, two heads, "\mathrm{coker}\ w"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\ u \arrow[r, tail] & V \arrow[r] & \mathrm{Coker}\ w &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Ker}\ w \simeq \mathrm{Coker}\ \mathrm{ker}\ h$ が成立するので余核の普遍性より, 以下の図式を可換にする射 $\mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u$ が一意に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ h \arrow[r, tail, "\mathrm{ker}\ h"] \arrow[drr, "0"'] & W \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[dr] & \mathrm{Ker}\ w \simeq \mathrm{Coker}\ \mathrm{ker}\ h \arrow[d, dotted, "\delta"] \\
 & & \mathrm{Coker}\ u
\end{tikzcd}
$$

次に,

$$\mathrm{Ker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f'}} \mathrm{Coker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g'}} \mathrm{Coker}\ w$$

が完全列であることを示す. まず,

$$\mathrm{Ker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w$$

が完全列であることを示す.
任意の対象 $S \in \mathscr{A}$ と射 $S \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ker}\ v$ で $\widetilde{g} \circ \varphi = 0$ を満たすものを考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] \arrow[ddr, bend left=60, "0"] & \\
\mathrm{Ker}\ u \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, tail, "\mathrm{ker}\ u"] & \mathrm{Ker}\ v \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, tail, "\mathrm{ker}\ v"] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[d, tail, "\mathrm{ker}\ w"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

Lemma 1.4 より, 対象 $S' \in \mathscr{A}$ とエピ射 $S' \xrightarrow{\psi} S$ が存在し, 以下の図式は可換になる.

$$
\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & S \arrow[d, "(\mathrm{ker}\ v)\circ\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

また, 核の性質より, 以下の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, "\varphi\circ\psi"] \arrow[d] \arrow[ddr, "0"] \arrow[dd, bend right, "0"'] & \mathrm{Ker}\ v \arrow[d, tail, "\ker\ v"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

核の普遍性より, 以下の図式を可換にする一意な射 $S' \longrightarrow \mathrm{Ker}\ u$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[d, dotted] \arrow[dr] \arrow[drr, "0"] & & \\
\mathrm{Ker}\ u \arrow[r, tail, "\ker\ u"'] & X \arrow[r, "u"'] & X'
\end{tikzcd}$$

よって, 以下の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & S \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
\mathrm{Ker}\ u \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, tail, "\ker\ u"] & \mathrm{Ker}\ v \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, tail, "\ker\ v"] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[d, tail, "\ker\ w"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

したがって, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & S \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\
\mathrm{Ker}\ u \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \mathrm{Ker}\ v \arrow[r, "\widetilde{g}"] & \mathrm{Ker}\ w
\end{tikzcd}$$

を得るため, **Lemma 1.4** より,

$$\mathrm{Ker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w$$

は完全列である.

次に,

$$\mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u$$

が完全列であることを示す.
任意の対象 $T \in \mathscr{A}$ と射 $T \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ker}\ w$ で $\delta \circ \tau = 0$ を満たすものを考える. 図式

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Coker}\ u
\end{tikzcd}$$

は完全列であるので, **Lemma 1.4** より, 対象 T' とエピ射 $T' \twoheadrightarrow T$ が存在して, 以下の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "0"] & \\
W \arrow[r, two heads, "h"'] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Coker}\ u
\end{tikzcd}$$

よって, 以下の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & T' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T \arrow[d, "\tau"] \\
 & W \arrow[r, two heads, "h"'] \arrow[d] \arrow[ddl] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[dddll, bend left, "\delta"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] & \\
X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, tail, "\mathrm{coker}\ u"'] & Y' & \\
\mathrm{Coker}\ u & &
\end{tikzcd}$$

射 $\mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u$ を構成した議論により, 射 $W \longrightarrow X' \longrightarrow \mathrm{Coker}\ u$ は 0 射であったため, 射 $T \longrightarrow W \longrightarrow X' \longrightarrow \mathrm{Coker}\ u$ は 0 射である. 図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X' \arrow[r, two heads, "\mathrm{coker}\ u"] & \mathrm{Coker}\ u
\end{tikzcd}$$

は完全列であるため, **Lemma 1.4** より, 対象 T'' とエピ射 $T'' \twoheadrightarrow T'$ が存在して, 以下の図式を可換になる.

$$\begin{tikzcd}
T'' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T' \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "0"] & \\
X \arrow[r, "u"'] & X' \arrow[r, two heads, "\mathrm{coker}\ u"'] & \mathrm{Coker}\ u
\end{tikzcd}$$

射 $T'' \twoheadrightarrow T' \longrightarrow W \longrightarrow Y$ を λ とおくと, 以下の可換図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
T'' \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "k"'] \arrow[ddr, "\lambda"] & T' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T \arrow[d, "\tau"] \\
 & W \arrow[r, two heads, "h"'] \arrow[d] \arrow[ddl] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[dddll, bend left, "\delta"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] & \\
X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, tail, "\mathrm{coker}\ u"'] & Y' & \\
\mathrm{Coker}\ u & &
\end{tikzcd}
$$

つまり, $v \circ \lambda = v \circ f \circ k$ が成立するため,

$$v(\lambda - (f \circ k)) = v \circ \lambda - v \circ f \circ k = 0$$

が成立する. よって, 核の普遍性より以下の図式を可換にする一意な射 $T'' \longrightarrow \mathrm{Ker}\ v$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
T'' \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "\lambda-(f\circ k)"] \arrow[drr, "0"] & & \\
\mathrm{Ker}\ v \arrow[r, tail, "\ker\ v"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

したがって, 以下の可換図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
T'' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Ker}\ v \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, tail, "\ker\ v"'] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[d, tail, "\ker\ w"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

つまり, 以下の可換図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
T'' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "0"] & \\
\mathrm{Ker}\ v \arrow[r, "\widetilde{g}"'] & \mathrm{Ker}\ w \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Coker}\ u
\end{tikzcd}
$$

よって, **Lemma 1.4** より,

$$\mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u$$

が完全列である. 上記の議論の双対を考えると,

$$\mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f'}} \mathrm{Coker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g'}} \mathrm{Coker}\ w$$

は完全列である．
以上の議論より完全列

$$\mathrm{Ker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Ker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\ u \xrightarrow{\widetilde{f'}} \mathrm{Coker}\ v \xrightarrow{\widetilde{g'}} \mathrm{Coker}\ w$$

を得る． ■

3 コホモロジー長完全列

アーベル圏で蛇の補題 ⇒ コホモロジー長完全列の埋め込み定理を使わない証明の流れをまとめておく．以下ではアーベル圏 $\mathscr{A}$ を固定して議論を進める．

複体のコホモロジーは次のように定義されるのだった．

Definition 3.1 (コホモロジー)

$\mathscr{A}$ の複体

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

について $d^n \circ d^{n-1} = 0$ から自然にモノ射 $\mathrm{Im}\, d^{n-1} \to \mathrm{Ker}\, d^n$ が誘導される．そこで複体 (A^*, d^*) の n 次コホモロジーを次で定義する．

$$H^n(A) = \mathrm{Coker}\,(\mathrm{Im}\, d^{n-1} \to \mathrm{Ker}\, d^n)$$

$\mathscr{A}$ が加群の圏のときには $\mathrm{Im}\, d^{n-1} \to \mathrm{Ker}\, d^n$ は包含写像であり上の定義は通常の複体の定義

$$H^n(A) = \mathrm{Ker}\, d^n / \mathrm{Im}\, d^{n-1}$$

を表している．

ここで同じ $\mathscr{A}$ の複体 (A^*, d^*) について条件 $d^n \circ d^{n-1} = 0$ はエピ射 $\mathrm{Coker}\, d^{n-1} \to \mathrm{Coim}\, d^n$ も誘導する．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Coker}\, d^{n-1} \arrow[r, dashed] & \mathrm{Coim}\, d^n & & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] & & A^n \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[rr, "d^n"] & & A^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
 & & \mathrm{Im}\, d^{n-1} \arrow[ur] \arrow[r, dashed] & \mathrm{Ker}\, d^n \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.2

$\mathscr{A}$ の複体 (A^*, d^*) に対して射の合成 $\mathrm{Ker}\, d^n \to A^n \to \mathrm{Coker}\, d^{n-1}$ で得られる射を $h^n \colon \mathrm{Ker}\, d^n \to \mathrm{Coker}\, d^{n-1}$ と書くことにするとき次が成り立つ．

$$\mathrm{Ker}\, h^n = \mathrm{Im}\, d^{n-1}\ ,\ \mathrm{Coker}\, h^n = \mathrm{Coim}\, d^{n-1}$$

Proof: $\mathrm{Ker}\, h^n$ について，次の図式が核の普遍性を満たすことを示せばよい．

$$\operatorname{Im} d^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d^n \xrightarrow{h^n} \operatorname{Coker} d^{n-1}$$

$h^n \circ x = 0$ となる任意の射 $x\colon X \to \operatorname{Ker} d^n$ を考えると $X \to \operatorname{Ker} d^n \to A^n \to \operatorname{Coker} d^{n-1}$ という図式が得られるので像の定義から次の図式の外側の三角形を可換にするような射 $X \to \operatorname{Im} d^{n-1}$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^n \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "h^n"] & A^n \arrow[r] & \operatorname{Coker} d^{n-1} \\
X \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "x"] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

この射が内側の三角形も可換にすることは $\operatorname{Ker} d^n \to A^n$ がモノ射であることからわかる．一意性も簡単にわかるので $\operatorname{Ker} h^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$ がいえた．

$\operatorname{Coker} h^n = \operatorname{Coim} d^{n-1}$ は双対の議論によりわかる． ■

Theorem 3.3

$\mathscr{A}$ の複体 (A^*, d^*) について次の自然な同型が成り立つ．

$$\operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n) \cong \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Coim} d^n)$$

Proof: Lemma 3.2 から射 $h^n\colon \operatorname{Ker} d^n \to \operatorname{Coker} d^{n-1}$ を考えると

$$\operatorname{Coim} h^n = \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n)\ ,\ \operatorname{Im} h^n = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Coim} d^n)$$

なので h^n について準同型定理を用いれば主張がいえる．

あるいは図式

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^n \arrow[r] & A \arrow[r] & \operatorname{Coim} d^n &
\end{tikzcd}$$

に蛇の補題を適用してもよい． ■

Theorem 3.3 はコホモロジーの双対的な定義が可能であることを示している．つまり $\mathscr{A}$ の複体 (A^*, d^*) の n 次コホモロジーを次の式でも定義できる．

$$H^n(A) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Coim} d^n)$$

この定義によりコホモロジーについても双対的な議論が可能となる．

$$\begin{tikzcd}
& & H^n(A) \arrow[r] & \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r] & \operatorname{Coim} d^n & & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] & & A^n \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[rr, "d^n"] & & A^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & \operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r] \arrow[ur] & \operatorname{Ker} d^n \arrow[r] \arrow[u] & H^n(A) & &
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.4

> $\mathscr{A}$ の複体 (A^*, d^*) について射 $d^n\colon A^n \to A^{n+1}$ は射 $\bar{d^n}\colon \operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ を誘導して次が成り立つ．
>
> $$\operatorname{Ker} \bar{d^n} = H^n(A)\ ,\ \operatorname{Coker} \bar{d^n} = H^{n+1}(A)$$

Proof： $\bar{d^n}\colon \operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ の構成からみる．まず $d^{n+1} \circ d^n = 0$ から射 $\hat{d^n}\colon A^n \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ が誘導され，さらにこの射は $d^n \circ d^{n-1} = 0$ から $\hat{d^n} \circ d^{n-1} = 0$ となることがわかる．よって余核の普遍性から射 $\bar{d^n}\colon \operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ が誘導される．

$$\begin{tikzcd}
A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\hat{d^n}"] & A^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & A^{n+2} \\
& \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r, dashed, "\bar{d^n}"] & \operatorname{Ker} d^{n+1} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

次に $\bar{d^n}$ の核と余核を調べる．$\operatorname{Coker} \bar{d^n} = H^{n+1}(A)$ については次の図式が余核の普遍性を満たすことを示せばよい．

$$\operatorname{Coker} d^{n-1} \xrightarrow{\bar{d^n}} \operatorname{Ker} d^{n+1} \longrightarrow H^{n+1}(A)$$

まず $\bar{d^n}\colon \operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ は $\operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Im} d^n \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ と分解されることがわかる．

$$\begin{tikzcd}
& & & \operatorname{Coker} d^n & \\
A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & A^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[d] & & A^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[u] & A^{n+2} \\
& \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend right, "\bar{d^n}"'] & \operatorname{Im} d^n \arrow[r] \arrow[ur] & \operatorname{Ker} d^{n+1} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

さらにこのとき $A^n \to \operatorname{Coker} d^n$ はエピ射なので射 $\operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Im} d^n$ はエピ射であることがわかる．よって $f \circ \bar{d^{n+1}} = 0$ となる任意の射 $f\colon \operatorname{Ker} d^{n+1} \to Y$ を考えると射 $\operatorname{Im} d^n \to \operatorname{Ker} d^{n+1} \to Y$ は 0 となるので射 $H^{n+1}(A) \to Y$ が誘導される．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "\bar{d^n}"] & \operatorname{Im} d^n \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^{n+1} \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & H^{n+1}(A) \arrow[d, dashed] \\
& & & Y
\end{tikzcd}$$

よって $\operatorname{Coker} \bar{d^n} = H^{n+1}(A)$．

$\operatorname{Ker} \bar{d^n} = H^n(A)$ は **Theorem 3.3** を使って双対の議論によりわかる．即ち，$\bar{d^n}$ はモノ射を通じて $\operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Coim} d^n \to \operatorname{Ker} d^n$ と分解され $H^n(A) \to \operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n$ は kernel 図式となる．

$$
\begin{tikzcd}
H^n(A) \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, d^{n-1} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\bar{d^n}"] & \mathrm{Coim}\, d^n \arrow[r, dashed] & \mathrm{Ker}\, d^{n+1} \arrow[d] & \\
A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & A^n \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[rr, "d^n"] & & A^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & A^{n+2} \\
& \mathrm{Im}\, d^{n-1} \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}
$$

■

Theorem 3.5

$\mathscr{A}$ の複体 $(A^*, d_A^*), (B^*, d_B^*), (C^*, d_C^*)$ について次の複体の完全列があるとする．

$$
0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f^*} B^* \xrightarrow{g^*} C^* \longrightarrow 0
$$

つまり f^*, g^* は複体の射（*cochain map*）で各次数ごとに上の列が完全列であるとする．このとき次のコホモロジー長完全列が存在する．

$$
\cdots \longrightarrow H^n(A) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(C)
$$
$$
\xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(B) \xrightarrow{H^{n+1}(g)} H^{n+1}(C) \longrightarrow \cdots
$$

Proof：まず各 $n \in \mathbb{N}$ について次の可換図式がある．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "d_A^n"] & B^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "d_B^n"] & C^n \arrow[r] \arrow[d, "d_C^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"'] & B^{n+1} \arrow[r, "g^{n+1}"'] & C^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

この図式は **Proposition 3.4** を用いて次のように拡張できる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \arrow[r] \arrow[ddd, bend right, "\bar{d_A^n}"'] & \operatorname{Coker} d_B^{n-1} \arrow[r] \arrow[ddd, bend right, "\bar{d_B^n}"'] & \operatorname{Coker} d_C^{n-1} \arrow[r] \arrow[ddd, bend right, "\bar{d_C^n}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^n \arrow[u] \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "d_A^n"] & B^n \arrow[u] \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "d_B^n"] & C^n \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d, "d_C^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"'] \arrow[d] & B^{n+1} \arrow[r, "g^{n+1}"'] \arrow[d] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_B^{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_C^{n+1} &
\end{tikzcd}
$$

またこの一番上の行と一番下の行は完全である．余核射がエピ射であり核射がモノ射であることを用いると次の図式が可換であることがわかる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d_A^n}"'] & \operatorname{Coker} d_B^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d_B^n}"'] & \operatorname{Coker} d_C^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d_C^n}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_B^{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_C^{n+1} &
\end{tikzcd}
$$

よって **Proposition 3.4** からこの図式に蛇の補題を用いれば主張を得る． ■

参考文献

[1] Masaki Kashiwara (著), Pierre Schapira (著)・「Categories and Sheaves」・Springer・2005

[2] 中岡 宏行 (著)・「圏論の技法」・日本評論社・2015

[3] 志甫 淳 (著), 新井 仁之 (編集), 小林 俊行 (編集), 斎藤 毅 (編集), 吉田 朋広 (編集)・「層とホモロジー代数」・共立出版・2016