超フィルターによる位相空間論

秋桜

概要

超フィルターはモデル理論や束論や位相空間論など様々なところで現れる. そこで, 本稿では位相空間論に視点を絞り, 超フィルターによる位相空間論についてまとめる.

超フィルターを用いて議論することで位相空間論の新しい視点を与えるだけでなく, 議論が簡潔になったりと利点も多い. そのため, 本稿では位相空間の基本的な概念を超フィルターを用いて特徴付けし, 距離空間における点列の収束と超フィルターの収束の類似点を紹介する. また, 様々な位相空間の定理を超フィルターを用いて証明し, 最後に超フィルターを用いることで簡潔に証明できる Tychonov の定理を示す.

1　超フィルターとその収束

フィルターと超フィルターの定義から始め, 有限交叉族から超フィルターが構成できることを示し, 超フィルターの収束性を定義する. そして, 最後に超フィルターの収束と閉包の関係を述べる.

1.1　超フィルターと有限交叉族

まず, フィルターと超フィルターを定義する.

Definition 1.1 (フィルター, 超フィルター)

集合 X 上のフィルターとは, X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合族 F で次の 2 つの条件を満たすものである.

- $\forall A, B \in F,\ A \cap B \in F$
- $\forall A \in F,\ A \subset B \subset X \Longrightarrow B \in F$

さらに, 任意の $A \subset X$ に対し, $A \in F,\ A^c \in F$ のどちらかのみ成立するとき, 超フィルターという.

集合 X 上の超フィルター全体の集合を $\mathcal{U}(X)$ と表す.*1
次に, いくつかの例をあげる.

Example 1.2 (単項超フィルター)

集合 X の元 x に対し,

$$P_x := \{A \subset X \mid x \in A\}$$

は X 上の超フィルターであり, 単項超フィルターという.

実際, 任意の $A, B \in P_x$ に対し, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるため, $x \in A \cap B$ である. つまり, $A \cap B \in P_x$ と

*1 $\mathcal{U}(X)$ は軽量版 Stone 双対から得られるモナドの T の対象関数とみることもできる.

なる. よって,

$$\forall A, B \in P_x,\ A \cap B \in P_x$$

が成立する. また, 任意の $A \in P_x$ に対し, $A \subset B \subset X$ とすると, $x \in B$ となる. つまり, $B \in P_x$ となるため,

$$\forall A \in P_x,\ A \subset B \subset X \Longrightarrow B \in P_x$$

が成立する. これらにより, P_x が X 上のフィルターであることがわかり, さらに, 任意の $A \subset X$ に対し, $x \in A,\ x \in A^c$ のどちらかのみ成立するため, $A \in P_x,\ A^c \in P_x$ のどちらかのみ成立する. したがって, P_x は X 上の超フィルターである.*2

Example 1.3 (押し出し超フィルター)

X, Y を集合, $f \colon X \to Y$ を写像, F を X 上の超フィルターとする. このとき,

$$f_*(F) := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in F\}$$

は X 上の超フィルターであり, 押し出し超フィルターという.

実際, $A, B \in f_*(F)$ とすると, $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in F$ であるため, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in F$ となる. よって,

$$\forall A, B \in f_*(F),\ A \cap B \in f_*(F)$$

が成立する. また, 任意の $A \in f_*(F)$ に対し, $A \subset B \subset X$ とすると, $f^{-1}(A) \in F$ と $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ と $F \in \mathcal{U}(X)$ より, $f^{-1}(B) \in F$ となる. よって,

$$\forall A \in f_*(F),\ A \subset B \subset X \Longrightarrow B \in f_*(F)$$

が成立する. これらにより, $f_*(F)$ が X 上のフィルターであることがわかり, さらに, 任意の $A \subset X$ に対し, $f^{-1}(A) \in F,\ f^{-1}(A) \notin F$ のどちらかのみ成立するため, $A \in f_*(F),\ A^c \in f_*(F)$ のどちらかのみ成立する. したがって, $f_*(F)$ は X 上の超フィルターである.*3

集合族から超フィルターを構成できる十分条件を与える.

Definition 1.4 (有限交叉族)

X を集合とする. $\mathcal{P}(X)$ の部分集合族 S が,

$$\forall \{A_1, A_2, \ldots A_n\} \subset S,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$$

を満たすとき, 有限交叉族という.

有限交叉族に対し, それを含む超フィルターが構成できる.

Theorem 1.5

X を集合とし, $S \subset \mathcal{P}(X)$ を有限交叉族とする. このとき,

$$\exists F \in \mathcal{U}(X)\ s.t.\ S \subset F$$

が成立する.

*2 P_x は軽量版 Stone 双対から得られるモナドの η の成分とみることもできる.
*3 $f_*(F)$ は軽量版 Stone 双対から得られるモナドの T の射関数とみることもできる.

Proof： $\mathcal{C} := \{A \subset \mathcal{P}(X) \mid S \subset A,\ A\text{ は有限交叉族 }\}$ は包含順序により, 順序集合となり, $\mathcal{C}$ の任意の全順序部分集合の上限はその全ての合併集合により与えられるため, Zorn の補題より, 極大元 F が存在する. $S \subset F$ であるため, F が X 上の超フィルターであることを示す.

任意の $A, B \in F$ に対し, $A \cap B \notin F$ とすると, $\{A \cap B\} \cup F$ は有限交叉族であり, $F \subset \{A \cap B\} \cup F$ より, F の極大性に矛盾する. よって,

$$\forall A, B \in F,\ A \cap B \in F$$

が成立する. また, 任意の $A \in F$ に対し, $A \subset B \subset X$ とし, $B \notin F$ とすると, $\{B\} \cup F$ は有限交叉族であり, $F \subset \{B\} \cup F$ より, F の極大性に矛盾する. よって,

$$\forall A \in F,\ A \subset B \subset X \Longrightarrow B \in F$$

が成立する. これらにより, F が X 上のフィルターであることがわかり, さらに, 任意の $A \subset X$ に対し, $A \notin F$ とすると, F の極大性より, $\{A\} \cup F$ は有限交叉族ではない. つまり,

$$\exists B \in \{A\} \cup F\ s.t.\ A \cap B = \emptyset$$

が成立する. $B \in \{A\}$ とすると, $A = \emptyset$ より, $A^c = X \notin F$ となるが, これは, $X \in F$ に矛盾するため, $B \notin \{A\}$ である. また, $B \in F$ とすると, $A \cap B = \emptyset$ より, $B \subset A^c$ となる. ここで, F はフィルターなので, $A^c \in F$ となる. よって, F は X 上の超フィルターである. したがって, 題意は示された. ■

1.2 超フィルターの収束

超フィルターの収束を定義する.

Definition 1.6 (収束)

X を位相空間, F を X 上の超フィルター, x を X の元とする.
F が任意の x の開近傍を含むとき, F は x に収束するといい, $F \searrow x$ と表す.

次に, いくつかの例をあげる.

Example 1.7

X を位相空間とし, x を X の元とする. このとき, P_x は x に収束する.

実際, P_x は x を含む任意の集合を含むため, 任意の x の開近傍を含む.

Example 1.8

X を密着位相空間とすると, 任意の X 上の超フィルターは任意の X の元に収束する. また, X を離散位相空間とすると, P_x 以外に収束する X 上の超フィルターは存在しない.

最後に, 超フィルターの収束と閉包の関係を述べる.

Proposition 1.9

X を位相空間, F を X 上の超フィルター, x を X の元とする. このとき, 以下は同値である.

(1) $F \searrow x$
(2) $\forall A \in F,\ x \in \overline{A}$

Proof: まず, (1)$\Longrightarrow$(2) を示す. $x \notin \overline{A}$ となる $A \in F$ が存在するとする. つまり, $x \in \overline{A}^c$ なので, $\overline{A}^c \in \mathcal{N}(x)$[*4]であり, (1) より, $\overline{A}^c \in F$ となる. また, $A \in F$ と $A \subset \overline{A}$ と $F \in \mathcal{U}(X)$ より, $\overline{A} \in F$ となる. これは, $F \in \mathcal{U}(X)$ に矛盾する. よって, (1)$\Longrightarrow$(2) が成立する.

次に, (2)$\Longrightarrow$(1) を示す. $F \not\searrow x$ とする. つまり, $U \notin F$ となる $U \in \mathcal{N}(x)$ が存在する. よって, $U^c \in F$ である. (2) より, $x \in \overline{U^c}$ となる. また, U^c は閉集合なので, $U^c = \overline{U^c}$ となり, $x \in U^c$ が従う. これは $U \in \mathcal{N}(x)$ に矛盾する. よって, (2)$\Longrightarrow$(1) が成立する. したがって, 題意は示された. ■

2 超フィルターによる位相空間論の基本的な概念の特徴付け

位相空間論の基本的な概念として, 開集合, 連続性, コンパクト性, ハウスドルフ性を超フィルターを用いて特徴付ける.

2.1 開集合の超フィルターによる特徴付け

開集合を超フィルターを用いて特徴付ける.

Theorem 2.1

X を位相空間とし, $U \subset X$ とする. このとき, 以下は同値である.

(1) U は開集合である.

(2) U の元に収束する任意の X 上の超フィルターは U を含む.

Proof: まず, (1)$\Longrightarrow$(2) を示す. $x \in U$ に収束する任意の X 上の超フィルター F を考える. (1) より, $U \in \mathcal{N}(x)$ なので, $U \in F$ が成立する. よって, (1)$\Longrightarrow$(2) が成立する.

次に, (2)$\Longrightarrow$(1) を示す. 任意の $U_x \in \mathcal{N}(x)$ に対し, $U_x \not\subset U$ となる $x \in U$ が存在するとすると, 任意の $V \in \mathcal{N}(x)$ に対し, $V \cap U^c \neq \emptyset$ となり, $\mathcal{N}(x)$ は有限交叉族であるため, $\{U^c\} \cup \mathcal{N}(x)$ は有限交叉族である. よって, **Theorem 1.5** より, $\{U^c\} \cup \mathcal{N}(x) \subset F$ となる $F \in \mathcal{U}(X)$ が存在する. また, 構成より, $F \searrow x$ である. よって, (2) より, $U \in F$ であるため, $F \in \mathcal{U}(X)$ に矛盾する. したがって, (2)$\Longrightarrow$(1) は成立する. これらにより, 題意は示された. ■

2.2 連続性の超フィルターによる特徴付け

連続写像を超フィルターを用いて特徴付ける.

Theorem 2.2

X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像, x を X の元とする. このとき, 以下は同値である.

(1) $f\colon X \to Y$ は x で連続である.

(2) $\forall F \in \mathcal{U}(X),\ F \searrow x \Longrightarrow f_*(F) \searrow f(x)$

Proof: まず, (1)$\Longrightarrow$(2) を示す. (1) より, 任意の $U \in \mathcal{N}(f(x))$ に対し, $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$ であるため, $U \in f_*(F)$ である. よって, (1)$\Longrightarrow$(2) が成立する.

[*4] x の開近傍全体の集合を $\mathcal{N}(x)$ で表す.

次に, (2)$\Longrightarrow$(1) を示す．任意の $U \in \mathcal{N}(f(x))$ と任意の $F \in \mathcal{U}(F)$ に対し, $F \searrow x$ とすると, (2) より, $f_*(F) \searrow f(x)$ となる．つまり, $U \in f_*(F)$ であり, $f^{-1}(U) \in F$ となる．よって, **Theorem 2.1** より, $f^{-1}(U)$ は開集合となる．したがって, (2)$\Longrightarrow$(1) が成立する．これらにより, 題意は示された． $\blacksquare$

2.3 コンパクト性とハウスドルフ性の超フィルターによる特徴付け

超フィルターは収束点の存在や一意性について制限がなかったが, コンパクト性やハウスドルフ性は収束点の存在や一意性を用いて特徴付けられる．
まず, コンパクト性を超フィルターを用いて特徴付ける．

Theorem 2.3

X を位相空間とする．このとき, 以下は同値である．

(1) X はコンパクト空間である．
(2) 任意の X 上の超フィルターは 1 つ以上の収束点をもつ．

Proof: まず, (1)$\Longrightarrow$(2) を示す．収束点をもたない X 上の超フィルターが存在するとする．つまり, 任意の $x \in X$ に対し, $U_x \notin F$ となる $U_x \in \mathcal{N}(x)$ が存在する．任意の $x \in X$ に対し, U_x は開集合であり, $\displaystyle\bigcup_{x \in X} U_x = X$ となるため, $(U_x)_{x \in X}$ は X の開被覆である．よって, (1) より, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$ となる $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n} \in (U_x)_{x \in X}$ が存在する．したがって, $F \in \mathcal{U}(X)$ より, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\right)^c = X^c = \emptyset \in F$ となる．しかし, $X \in F$ であるため, $F \in \mathcal{U}(X)$ に矛盾する．よって, (1)$\Longrightarrow$(2) が成立する．

次に, (2)$\Longrightarrow$(1) を示す． X はコンパクトではないとする．つまり, ある X の開被覆 $\mathcal{C}$ で, そのうちのどの有限個でも X を被覆できないものが存在する．このとき, $(U^c)_{U \in \mathcal{C}}$ は有限交叉族である．よって, **Theorem 1.5** より, $(U^c)_{U \in \mathcal{C}} \subset F$ となる $F \in \mathcal{U}(X)$ が存在する．また, (2) より, F は収束点 $x \in X$ をもつ．つまり, x の任意の開近傍は F に含まれる．ここで, $\mathcal{C}$ は X の開被覆なので, $x \in U$ となる $U \in \mathcal{C}$ が存在し, $U \in F$ となる．また, F の構成より, $U^c \in F$ であるため, $F \in \mathcal{U}(X)$ に矛盾する．よって, (2)$\Longrightarrow$(1) が成立する．したがって, 題意は示された． $\blacksquare$

次に, ハウスドルフ性を超フィルターを用いて特徴付ける．

Theorem 2.4

X を位相空間とする．このとき, 以下は同値である．

(1) X はハウスドルフ空間である．
(2) 任意の X 上の超フィルターは 1 つ以下の収束点をもつ．

Proof: まず, (1)$\Longrightarrow$(2) を示す．2 つ以上の収束点 $x \neq y \in X$ をもつ $F \in \mathcal{U}(X)$ が存在するとする．つまり, 任意の $U \in \mathcal{N}(x)$ に対し, $U \in F$ であり, 任意の $V \in \mathcal{N}(y)$ に対し, $V \in F$ である．ここで, (1) より, $U_x \cap U_y = \emptyset$ となる $U_x \in \mathcal{N}(x)$ と $U_y \in \mathcal{N}(y)$ が存在する． $F \in \mathcal{U}(X)$ より, $\emptyset = U_x \cap U_y \in F$ であり, $X \in F$ であるため, $F \in \mathcal{U}(X)$ に矛盾する．よって, (1)$\Longrightarrow$(2) が成立する．

次に, (2)$\Longrightarrow$(1) を示す． X はハウスドルフ空間でないとする．つまり, 任意の $U_x \in \mathcal{N}(x)$ と任意の $U_y \in \mathcal{N}(y)$ に対し, $U_x \cap U_y \notin \emptyset$ となる $x \neq y \in X$ が存在する．よって, $\mathcal{C} := \{U \subset X \mid U \in \mathcal{N}(x) \text{ または } \mathcal{N}(y)\}$ は有限交叉族である．したがって, **Theorem 1.5** より, $\mathcal{C} \subset F$ となる $F \in \mathcal{U}(X)$ が存在する．また, F の構成より, $F \searrow x$ かつ $F \searrow y$ となるため, (2) に矛盾する．よって, (2)$\Longrightarrow$(1) が成立する．したがって, 題意は示された．

■

これらより, コンパクトハウスドルフ性も超フィルターにより特徴付けできる.

Corollary 2.5

X を位相空間とする. このとき, 以下は同値である.

(1) X はコンパクトハウスドルフ空間である.

(2) 任意の X 上の超フィルターは唯 1 つの収束点をもつ.

3　超フィルターの収束と距離空間における点列の収束との類似点

今まで示した超フィルターに夜特徴付けと距離空間における点列の収束との類似点を述べる.

距離空間 X の部分集合 A が閉集合であることと, A の点列の収束点が A に含まれることは同値である. これは, **Proposition 1.9** と類似している.

距離空間 X の部分集合 A が開集合であることと, A の元に収束する任意の点列の十分進んだ点が A に含まれることは同値である. これは, **Theorem 2.1** と類似している.

距離空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ が連続であることと, 点列 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ が $x \in X$ に収束するならば点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}} \subset Y$ が $f(x) \in Y$ に収束することは同値である. これは, **Theorem 2.2** と類似している.

距離空間ではコンパクト性と点列コンパクト性が同値であるため, 距離空間 X がコンパクト空間であることと, X の任意の点列は収束する部分列をもつことは同値である. これは, **Theorem 2.3** と類似している.[*5]

距離空間はハウスドルフ空間であるため, 距離空間 X の任意の点列は収束するならば収束点は一意である. これは, **Theorem 2.4** と類似している.

4　超フィルターによる位相空間論の基本的な定理の証明

位相空間論で扱う基本的な定理を超フィルターを用いて示す.

Proposition 4.1

X をコンパクト空間とし, $A \subset X$ を閉集合とする. このとき, A はコンパクト集合である.

Proof: 任意の $F \in \mathcal{U}(A)$ に対し, 拡大した超フィルター $F' \in \mathcal{U}(X)$ を考える. X はコンパクト空間なので, $F' \searrow x$ となる $x \in X$ が存在する. また, **Proposition 1.9** と A が閉集合であることより, $x \in \overline{A} = A$ となる. よって, **Theorem 2.3** より, A はコンパクト集合である. ■

Proposition 4.2

X をハウスドルフ空間とする. このとき, $A \subset X$ はハウスドルフ空間である.

[*5] 任意のフィルターが収束する拡大フィルターをもつとみることもできる.

Proof: 任意の $F \in \mathcal{U}(A)$ に対し, 拡大した超フィルター $F' \in \mathcal{U}(X)$ を考える. X はハウスドルフ空間なので, **Theorem 2.4** より, 収束点は 1 つ以下である. よって, **Theorem 2.4** より, A はハウスドルフ空間である. ■

Proposition 4.3

X をハウスドルフ空間とし, $A \subset X$ をコンパクト集合とする. このとき, A は閉集合である.

Proof: 任意の $F \in \mathcal{U}(A)$ を考える. **Proposition 4.2** より, A はハウスドルフ空間であり, A はコンパクト集合なので, A はコンパクトハウスドルフ空間である. よって, **Corollary 2.5** より, $F \searrow a$ となる唯 1 つの収束点 $a \in A$ が存在する. したがって, **Proposition 1.9** より, A は閉集合である. ■

Proposition 4.4

X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像, $A \subset X$ をコンパクト集合とする. このとき, $f(A)$ はコンパクト集合である.

Proof: 任意の $F \in \mathcal{U}(f(A))$ を考える. A がコンパクト集合であるので, **Theorem 2.3** より, $f^{-1}(F) \in \mathcal{U}(A)$[*6]は $f^{-1}(F) \searrow a$ となる $a \in A$ が存在する. また, $f(f^{-1}(F)) \subset F$ と **Theorem 2.2** より, $F \searrow f(a)$ となる. よって, **Theorem 2.3** より, $f(A)$ はコンパクト集合である. ■

Corollary 4.5

X をコンパクト空間, Y をハウスドルフ空間, $f\colon X \to Y$ を全単射連続写像とする. このとき, f は同相写像である.

Proof: 任意の閉集合 $A \subset X$ に対し, X はコンパクト空間なので, **Proposition 4.1** より, A は閉集合である. また, f は連続写像なので, **Proposition 4.4** より, $f(A)$ はコンパクト集合である. さらに, Y はハウスドルフ空間なので, **Proposition 4.3** より, $f(A)$ は閉集合である. つまり, f の逆写像は連続なので, f は同相写像である. ■

5 Tychonov の定理

Tychonov の定理は様々なところで使われ, 選択公理と同値である. ここでは超フィルターを用いた簡潔な証明を述べる.

Lemma 5.1

$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族, x を $\prod_{i\in I} X_i$ の元, F を $\prod_{i\in I} X_i$ 上の超フィルター, $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を標準射影写像とする. このとき, 以下は同値である.

(1) $F \searrow x$
(2) $\forall i \in I,\ p_{i*}(F) \searrow p_i(x)$

Proof: まず, (1)$\Longrightarrow$(2) を示す. 任意の $i \in I$ に対し, p_i は連続写像なので, **Theorem 2.2** より, (1)$\Longrightarrow$(2) が成立する.

次に, (2)$\Longrightarrow$(1) を示す. 積位相の定義より, 任意の $U \in \mathcal{N}(x)$ に対し, $U = p_i^{-1}(U)$ となる開集合 $U_i \in \mathcal{N}(p_i(x))$ が存在する. よって, (2) より, $U_i \in p_{i*}$ となる. したがって, $U = p_i^{-1}(U_i) \in F$ となるため, (2)$\Longrightarrow$(1) が成立する. これらにより, 題意は示された.

[*6] $f^{-1}(A)$ が A 上の超フィルターであることは容易に確かめられる.

■

ハウスドルフ空間の積空間はハウスドルフ空間となる.

Proposition 5.2

$(X_i)_{i\in I}$ をハウスドルフ空間の族とする. このとき, $\prod_{i\in I} X_I$ はハウスドルフ空間である.

Proof: $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を標準射影写像とする. 任意の $F \in \mathcal{U}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)$ に対し, $F \searrow x$ かつ $F \searrow y$ となる $x \neq y \in \prod_{i\in I} X_i$ が存在するとする. つまり, **Lemma 5.1** より, 任意の $i \in I$ に対し, $p_{i*}(F) \searrow p_i(x)$ かつ $p_{i*}(F) \searrow p_i(x)$ となる. しかし, 任意の $i \in I$ に対し, X_i はハウスドルフ空間なので, **Theorem 2.4** より矛盾する. よって, 題意は示された. ■

コンパクト空間の積空間はコンパクト空間となる.

Theorem 5.3 (*Tychonov* の定理)

$(X_i)_{i\in I}$ をコンパクト空間の族とする. このとき, $\prod_{i\in I} X_I$ はコンパクト空間である.

Proof: $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ を標準射影写像とする. 任意の $i \in I$ に対し, X_i はコンパクト空間なので, **Theorem 2.3** より, 任意の $F \in \mathcal{U}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)$ に対し, $p_{i*}(F) \searrow x_i$ となる $x_i \in X_i$ が存在する.[*7] ここで, $x := (x_i)_{i\in I}$ とすると, $p_{i*}(F) \searrow p_i(x)$ となり, **Lemma 5.1** より, $F \searrow x$ となる. また, **Theorem 2.3** より, $\prod_{i\in I} X_I$ はコンパクト空間である. ■

参考文献

[1] Marius Stekelenburg(著)・「Ultrafilter and Topology」・2014・`https://www.math.leidenuniv.nl/scripties/BachStekelenburg.pdf#search='ultrafilter+and+topology'`

[2] uni(`@unununum_1`)(著)・「uni のスケッチノート」・2017・`http://unununum.hatenablog.com`

[3] love ブルバキ (ラブル)(著)・「位相空間論とフィルター」・2018・`https://tetobourbaki.hatenablog.com/entry/2018/07/11/191714`

[4] Mathpedia・「フィルターによる位相空間論」・`https://mathematicspedia.com/index.php?フィルターによる位相空間論`

[5] `@kyo_math1729`(著)・「位相空間上のフィルターの収束」・2018・`https://drive.google.com/file/d/1I0IfshQW5bvpnPTYIHfs5mDC5CKk38k9/view?usp=sharing`

*7 選択公理を用いる.