力学系?なにそれおいしいの?

ゐぶ

自己紹介

自己紹介

ゐぶです!

目次

流れ

- 力学系ってなに?
- 離散力学系
- 連続力学系
- 反復写像
- ロジスティック方程式
- 2 次元の定数係数線形微分方程式
- 平衡点と安定性
- 線形安定性解析

力学系ってなに?

力学系ってなに?

力学系

与えられた空間の各点の時間発展を記述する方法であり, 可能な状態の集合と過去の状態から現在の状態を決定する規則から成り立っている.

　力学系は広い分野の数学だけでない学問も使われる. 古典力学,Hamilton 系では, 不変測度が存在し, 測度論的考察が重要になる. また, 統計力学から生まれた数学的理論であるエルゴード理論は, 測度論的力学系研究の重要な部分を占める.

力学系の定義

定義

以下の条件を満たす時間 T, 位相空間 M, 写像 φ の組を力学系という.

$$\varphi : T \times M \to M,$$

$$\forall x \in M, \varphi(0, x) = x,$$

$$\forall s, t \in T, \forall x \in M, \varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(t + s, x)$$

力学系の分類

力学系は大きく離散力学系と連続力学系の 2 つに分けられる.
時間 T が $\mathbb{R}$ のであるとき連続力学系,$\mathbb{Z}$ であるとき離散力学系という.

離散力学系と連続力学系は何が違うの？

連続力学系

- 連続時間における系の発展を記述する
- 微分方程式などを扱う
- 自然現象などで使える

離散力学系

- 離散的な時間における系の発展を記述する
- 反復写像などを扱う
- 経済学, 金融理論などで使える

離散力学系 (1 次元写像)

ある領域 I 上の写像 $f : I \to I$ について

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

で定義される点列を扱う.
高校生でも習う漸化式も離散力学系の一つの例である.
 簡単な例として関数 $f(x) = 5x$ を考えてみよう！
この関数はそれぞれの数 x にその 5 倍の数を割り当てる規則である.
また,x をある生物の個体数とすると,

$$x_{n+1} = f(x_n) = 5x_n$$

に従って時間とともに変化する個体数を考える簡単な力学系である.

連続力学系 (微分方程式)

次に連続力学系を見てみよう！
微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad (a \text{ は定数})$$

は $x = x(t)$ を時刻 t における生物の個体数と考えることができる. また,a は生物の出生率と死亡率の差であり,$\frac{dx}{dt}$ は単位時間あたりの増加率である.

この微分方程式は変数分離法で簡単に解くことができ,k を任意定数として,

$$x(t) = ke^{at}$$

となる.

a の値を変えると, それに応じて解も変化する. また, 解 $t \to \infty$ での振る舞い振る舞いは a が正であるか負であるかによって大きく異なる.

解の振る舞い

$\frac{dx}{dt} = ax$ の解の振る舞い

1, $a > 0$ の場合は k の値に応じて,

$$\lim_{t\to\infty} ke^{at} = \begin{cases} \infty, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -\infty, & k < 0. \end{cases}$$

2, $a = 0$ の場合は $ke^{at} = const$

3.$a < 0$ の場合は k の値によらず, $\lim_{t\to\infty} ke^{at} = 0$

ロジスティック方程式

もう少し現実的な仮定をして見てみよう！

現実的な仮定

1, 個体数が少ないときには個体数の単位時間あたりの増加率 $\frac{dx}{dt}$ は個体数 $x(t)$ にほぼ比例する.
2, 個体数がある程度以上多くなると増加率 $\frac{dx}{dt}$ は負になり, 個体数は減少する.

上の仮定をすると,
微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

が考えられる.

ロジスティック方程式

ここで,a と N は正の定数で,a は個体数が少ないときの増加率,N は環境によって定まる適正な個体数を表す. 実際,x の値が N に比べて小さい場合は,

$$1 - \left(\frac{x}{N}\right) \approx 1$$

であるので微分方程式は近似的に,

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

であり,$x > N$ の場合には,

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right) < 0$$

である.

ロジスティック方程式の解

今回は $N = 1$ の時を考えよう！
部分分数分解と変数分離法を使うと，解は任意定数 K を用いて，

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1 + Ke^{at}}$$

となる．ここで $t = 0$ を代入して K について解くと，

$$K = \frac{x(0)}{1 - x(0)}$$

であるので，解 $x(t)$ は時刻 $t = 0$ での値 $x(0)$ を用いて，

$$x(t) = \frac{x(0)e^{at}}{1 - x(0) + x(0)e^{at}}$$

と表される．

次に a, b, c, d を定数として
微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

を考えよう！
ここで

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと上の微分方程式は $\dot{z} = Az$ と書ける．
この微分方程式は行列 A の固有値によって系の振る舞いを分類することができる！

トレースと行列式による固有値の分類

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると，固有値を求める固有多項式は，

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

つまり

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

を考えればよい．これをトレースと行列式を使って書き換えると，

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

と書き換えられる．

トレースと行列式による固有値の分類

よって，固有値は

$$\lambda = \frac{tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)}}{2}$$

で求めることができる．また，

$$D = tr(A)^2 - 4det(A)$$

とすると，

D での固有値の分類

- 正ならば相異なる実固有値 2 つ
- 負ならば共役な複素固有値 2 つ
- 0 ならば重複した固有値

と分類することができる．

相異なる 2 つの実固有値

固有値を λ_1, λ_2 とし, 対応する固有ベクトルがそれぞれ $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ すると, 一般解は

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

となる.

固有値の符号による分類

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $\cdots$ 鞍点
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\cdots$ 沈点
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\cdots$ 源点

複素固有値

複素固有値を λ_1, λ_2 とし，対応する固有ベクトルがそれぞれ $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ すると，一般解は

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

となる．

複素数の種類での分類

- λ_1, λ_2 が純虚数 $\cdots$ 過心点
- λ_1, λ_2 が実部が正の複素数 $\cdots$ 渦状源点
- λ_1, λ_2 が実部が負の複素数 $\cdots$ 渦状沈点

重複した固有値

固有値を λ とし, 対応する固有ベクトルを (u_1, u_2) すると, 一般解は

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

となる.
重複した固有値の場合の系の振る舞いはノードという.

平衡点

次の例に行く前に平衡点と安定性について見てみよう！
2 次元の微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

が与えられているとして，

$$f(p, q) = g(p, q) = 0$$

を満たす (p, q) を平衡点という．

安定性

$\tilde{x} = (p, q)$ を平衡点,x_0 を初期値とする

平衡点 $\tilde{x} = (p, q)$ は安定

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,$||x_0 - \tilde{x}|| < \delta$ ならば $||x(t; x_0) - \tilde{x}|| < \varepsilon$ が成り立つ.

平衡点 $\tilde{x} = (p, q)$ は漸近安定

$\lim_{t \to \infty} x(t; x_0) = \tilde{x}$ が成り立つ.

非線形微分方程式の線形化

次に微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

が平衡点 (p, q) を持つとき，その系の振る舞いを見てみよう！
ここで $f(x, y), g(x, y)$ を R_1, R_2 を剰余として (p, q) まわりでテイラー展開すると

$$\begin{cases} f(x, y) = f(p, q) + f_x(p, q)(x - p) + f_y(p, q)(y - q) + R_1 \\ g(x, y) = g(p, q) + g_x(p, q)(x - p) + g_y(p, q)(y - q) + R_2 \end{cases}$$

(p, q) が平衡点であるから $f(p, q) = g(p, q) = 0$ となることと
$u = x - p, v = y - q$ とおくと，

線形化行列

$$\begin{cases} \dot{u} = f_x(p,q)u + f_y(p,q)v \\ \dot{v} = g_x(p,q)u + g_y(p,q)v \end{cases}$$

と近似できる.

$$A = \begin{pmatrix} f_x(p,q) & f_y(p,q) \\ g_x(p,q) & g_y(p,q) \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とすると線形微分方程式の様に $\dot{z} = Az$ と考えられる. また行列 A のことを線形化行列という.
この線形化行列を使って系の振る舞いを見てみよう！

非線形微分方程式の解の振る舞い

線形化行列は非線形項を無視し, 近似してできた行列であるためどこまで正確に系の振る舞いを見ることができるか分からない.
そこで次の定理を利用する.

定理

微分方程式が平衡点 (p, q) を持つとき,(p, q) の周りの線形化行列のすべての固有値の実部が負ならば,(p, q) は漸近安定である.
また, 線形化行列の固有値のうち実部が正になるものが 1 つでも存在すれば (p, q) は不安定である.

Hartman・Grobman の定理

次の定理は双曲型平衡点ならば簡単に系の振る舞いを知ることができる定理である.

双曲型平衡点

平衡点まわりの線形化行列がの固有値全てが 0 でない実部を持つ

Hartman・Grobman の定理

双曲型平衡点まわりの流れは, 平衡点まわりの線形化方程式における原点付近の流れと同相である.

ロトカ・ボルテラ方程式

微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

を考えよう！

この微分方程式は x を被食者の個体数,y を捕食者と考えることができ，ロトカ・ボルテラ方程式という．この微分方程式は線形化すると

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

となり平衡点は $(0, 0), (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ であるため系の振る舞いを調べることができる．

次はもう少し仮定を考慮したモデルを考えよう！

ロトカ・ボルテラ方程式

微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - xy - x^2 \\ \dot{y} = -2y + xy \end{cases}$$

の系の振る舞いを実際に見てみよう！

平衡点は $(0, 0), (2, 2), (4, 0)$ である，また線形化すると，

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2x - y & -x \\ y & x - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

となる．

$(0,0)$ 付近では,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$(2,2)$ 付近では,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$(4,0)$ 付近では,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を考えることで系の振る舞いを見ることができる.

ロトカ・ボルテラ方程式

$(0,0)$ での線形化行列の固有値は $-2, 4$ で鞍点となる
$(2,2)$ での線形化行列の固有値は $-1 \pm \sqrt{3}i$ で渦状沈点となる.
$(4,0)$ での線形化行列の固有値は $-4, 2$ で鞍点となる.
このように解くことが難しい非線形微分方程式でも線形化することで系の振る舞いを知ることができる！

結局力学系っておいしいの？

結局力学系っておいしいの？

おいしい！

おまけ (恋愛問題)

$$x(t) = \text{時刻 } t \text{ でのゐぶがある女性を好き/嫌いな度合い}$$
$$y(t) = \text{時刻 } t \text{ でのある女性がゐぶを好き/嫌いな度合い}$$

とし, 微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{cases}$$

を考えてみてください！！

ゐぶの恋の行方を調べることができた人にはご褒美があります！！

参考文献

- Morris W.Hirsch (著), Stephen Smale (著), Robert L.Devaney (著), 桐木 紳 (翻訳), 三波 篤郎 (翻訳)・「 力学系入門 ―微分方程式からカオスまで―」・共立出版株式会社・2017
- ティム・D. サウアー (著), キャスリーン・T. アリグッド (著) ・「カオス 1 力学系入門」・シュプリンガー・ジャパン株式会社・2006
- Steven H. Strogatz (著), 田中 久陽 (翻訳), 中尾 裕也 (翻訳), 千葉 逸人 (翻訳)・「ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス」・丸善出版・2015
- 松葉 育雄・「力学系 カオス」・森北出版株式会社・2011
- S. ウィギンス (著). 丹羽 敏雄 (翻訳)・「非線形の力学系とカオス」・丸善出版株式会社・2012
- Michael Tabor(著)・「CHAOS AND INTEGRABILITY IN NONLINEAR DYNAMICS An Introduction」・2010
- 桑村 雅隆 (著)・「パターン形成と分岐理論」・共立出版株式会社・2015
- 青木 統夫 (著), 白岩 謙一 (著)・「力学系とエントロピー」・共立出版株式会社・1985