普遍性が魅せる美しき世界

ゐぶ

目次

流れ

- 圏
- 関手
- 自然変換
- 始対象, 終対象
- 積, 余積
- イコライザ, コイコライザ
- 引き戻し, 押し出し

圏

定義

- 対象の集まり $ob(\mathscr{A})$
- 各 $A, B \in ob(\mathscr{A})$ について，A から B への射の集まり $\mathscr{A}(A, B)$
- 各 $A, B, C \in ob(\mathscr{A})$ について，合成とよばれる関数

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(B,C) \times \mathscr{A}(A,B) & \longrightarrow & \mathscr{A}(A,C) \\ \Cup & & \Cup \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

- 各 $A \in ob(\mathscr{A})$ について，A 上の恒等射とよばれる $\mathscr{A}(A, A)$ の元 1_A

  からなり，以下の公理を満たすものである．

結合法則：任意の $f \in \mathscr{A}(A, B)$，$g \in \mathscr{A}(B, C)$，$h \in \mathscr{A}(C, D)$ について $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成立する．
単位法則：任意の $f \in \mathscr{A}(A, B)$ について，$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ が成立する．

色々な圏

例

- 圏 **Set** は集合を対象とし, 写像を射とした圏である.
- 圏 **Grp** は群を対象とし, 群準同型写像を射とした圏である.
- 圏 **Ab** はアーベル群を対象とし, アーベル群の間の群準同型写像を射とした圏である.
- 圏 **Mon** はモノイドを対象とし, モノイド準同型写像を射とした圏である.
- 圏 **Ring** は環を対象とし, 環準同型写像を射とした圏である.
- 圏 **CRing** は可換環を対象とし, 可換環の間の環準同型写像を射とした圏である.
- 圏 **Vect**$_{\mathbf{k}}$ は体 **k** 上の線形空間を対象とし, 線形写像を射とした圏である.
- 圏 **Top** は位相空間を対象とし, 連続写像を射とした圏である.
- 圏 **Man** は可微分多様体を対象とし, 可微分写像を射とした圏である.
- 圏 **Meas** は可測空間を対象とし, 可測関数を射とした圏であ

同型射

定義

圏 $\mathscr{A}$ の射 $f : A \to B$ が同型射であるとは，
射 $g : B \to A$ が存在して，$g \circ f = id_A$ かつ $f \circ g = id_B$ が成立する．
A から B に同型射が存在するとき，A と B は同型といい，$A \cong B$ と
書く．

例

- 圏 **Set** の同型射は全単射である．
- 圏 **Grp** の同型射は群同型写像である．
- 圏 **Ring** の同型射は環同型写像である．
- 圏 **Top** の同型射は同相写像である．
- 圏 **Man** の同型射は微分同相写像である．

関手

定義

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を圏とする. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ とは,

- $A \mapsto F(A)$ と書かれる関数 $ob(\mathscr{A}) \to ob(\mathscr{B})$
- $A, A' \in ob(\mathscr{A})$ について, $f \mapsto F(f)$ と書かれる関数 $\mathscr{A}(A, A') \to \mathscr{B}(F(A), F(A'))$
  からなり, 以下の公理を満たすものである.

$\mathscr{A}$ で $f : A \to A'$, $f' : A' \to A''$ となるものについて,
$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$
$A \in ob(\mathscr{A})$ について, $F(1_A) = 1_{F(A)}$

関手の例

冪集合関手

$\mathfrak{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$
対象は各集合 A に対して，A の全ての部分集合 $S \subset A$ から成る冪集合 $\mathfrak{P}(A)$ を対応させる．
射は，$f : A \to B$ に対して，各 $S \subset A$ をその像 $f(S) \subset B$ に写す写像 $\mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ を対応させる．
$\mathfrak{P}(1_A) = 1_{\mathfrak{P}(A)}$ と $\mathfrak{P}(g \circ f) = \mathfrak{P}(g) \circ \mathfrak{P}(f)$ を満たすため実際に関手になっていることが分かる．

自然変換

定義

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を圏とし, $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を関手とする. 自然変換 $\alpha : F \to G$ とは $\mathscr{A}$ の対象で添字づけられた $\mathscr{B}$ の射の族 $\left(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A) \right)_{A \in \mathscr{A}}$ であり, $\mathscr{A}$ の各射 $A \xrightarrow{f} A'$ について図式

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(A') \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(A') \end{tikzcd}$$

が可換になるものをいう. 射 α_A は α の成分とよばれる.

自然変換の例

行列式

2 種類の関手 $M_n : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Mon}$ と $U : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Mon}$ を考える.
M_n は対象である可換環 R に対して, R 成分の $n \times n$ 行列 $M_n(R)$ を対応させる.
$M_n(R)$ は実際乗法においてモノイドになっていることが分かる.
射である環準同型写像 $R \to S$ に対して, モノイド準同型写像
$M_n(R) \to M_n(S)$ に対応させる.
U は忘却関手である.
$X \in M_n(R)$ は行列式 $\mathrm{det}_R(X) \in R$ を持ち, 行列式の性質

$$\mathrm{det}_R(XY) = \mathrm{det}_R(X)\mathrm{det}_R(Y) \ , \ \mathrm{det}_R(I) = 1$$

から各 R について $\mathrm{det}_R : M_n(R) \to U(R)$ がモノイド準同型写像である事が分かる.

自然変換の例

行列式

行列式は全ての環について同じ式で定義されるため, 図式

$$\begin{array}{ccc} M_n(R) & \xrightarrow{M_n(f)} & M_n(S) \\ {\scriptstyle \det_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \det_S} \\ U(R) & \xrightarrow{U(f)} & U(S) \end{array}$$

は可換である. したがって, 行列式は自然変換であることが分かる.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{CRing} \arrow[r, bend left, "M_n"] \arrow[r, bend right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \det"] & \mathbf{Mon} \end{tikzcd}$$

始対象, 終対象

定義

$I \in ob(\mathscr{A})$ が始対象であるとは, 次の性質を満たすときをいう.
任意の対象 $A \in ob(\mathscr{A})$ に対し, I から A への射がただ一つ存在する.

$T \in ob(\mathscr{A})$ が終対象であるとは, 次の性質を満たすときをいう.
任意の対象 $A \in ob(\mathscr{A})$ に対し, A から T への射がただ一つ存在する.

例

Set の始対象は空集合であり, 終対象は一点集合である.

積

定義

$\mathscr{A}$ を圏とし，$X, Y \in ob(\mathscr{A})$ をとる．X と Y の積とは，対象 P と射

$$X \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} Y$$

からなる三つ組 (P, p_1, p_2) であり，$\mathscr{A}$ の任意の対象と射

$$X \xleftarrow{f_1} A \xrightarrow{f_2} Y$$

について，

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

が可換になるような射 $\bar{f} : A \to P$ がただ一つ存在するという性質をもつもののことである．

余積

定義

$\mathscr{A}$ を圏とし，$X, Y \in ob(\mathscr{A})$ をとる．X と Y の余積とは，対象 P と射

$$X \xrightarrow{p_1} P \xleftarrow{p_2} Y$$

からなる三つ組 (P, p_1, p_2) であり，$\mathscr{A}$ の任意の対象と射

$$X \xrightarrow{f_1} A \xleftarrow{f_2} Y$$

について，

$$\begin{tikzcd} & A & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "p_1"'] & P \arrow[u, dotted, "\bar{f}"] & Y \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd}$$

が可換になるような射 $\bar{f} : P \to A$ がただ一つ存在するという性質をもつもののことである．

普遍性の例

Set の積

Set における積は直積集合である．
実際，S_1, S_2 を集合とし，直積集合

$$S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) | s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

をとる．$S_1 \times S_2$ から S_1, S_2 に，自然な射影が，

$$p_1 : S_1 \times S_2 \to S_1 \ ; \ p_1((s_1, s_2)) = s_1,$$

$$p_2 : S_1 \times S_2 \to S_2 \ ; \ p_2((s_1, s_2)) = s_2$$

により得られる．

普遍性の例

Set の積

ここで集合 X と写像 $f_1 : X \to S_1$, $f_2 : X \to S_2$ が任意に与えられたとする.
このとき, 写像 (f_1, f_2) を

$$(f_1, f_2) : X \to S_1 \times S_2 \ ; \ x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$

により定めると, これは

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "{(f_1, f_2)}"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ S_1 & S_1 \times S_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & S_2 \end{tikzcd}$$

を可換にする唯一の写像である. したがって, 積の普遍性を満たす.

普遍性の例

$(\mathbf{R}, \leq)$ の積

$(\mathbf{R}, \leq)$ の積は最小値である. つまり, $x, y \in \mathbf{R}$ の積は $\min\{x, y\}$である.

$(\mathfrak{P}(S), \subset)$ の積

$(\mathfrak{P}(S), \subset)$ の積は共通部分である. つまり, $X, Y \in \mathfrak{P}(S)$ の積は $X \cap Y$ である.

イコライザ

定義

$\mathscr{A}$ を圏とし，$X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ を $\mathscr{A}$ の対象と射とする．s と t のイコライザとは，対象 E と射 $E \xrightarrow{i} X$ であって，$E \xrightarrow{i} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ について，$s \circ i = t \circ i$ を満たし，任意の対象と射 $A \xrightarrow{f} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ で $s \circ f = t \circ f$ を満たすものについて，

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
E \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & Y
\end{tikzcd}$$

が可換になる射 $A \xrightarrow{\bar{f}} E$ がただ一つ存在するという性質を持つものである．

定義

$\mathscr{A}$ を圏とし，$X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ を $\mathscr{A}$ の対象と射とする．s と t のコイコライザとは，対象 C と射 $Y \xrightarrow{p} C$ であって，$X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} C$ について，$p \circ s = p \circ t$ を満たし，任意の対象と射 $X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{f} A$ で $f \circ s = f \circ t$ を満たすものについて，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\ & & A \end{tikzcd}$$

が可換になる射 $C \xrightarrow{\bar{f}} A$ がただ一つ存在するという性質を持つものである．

普遍性の例

Set のイコライザ

集合と関数 $X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$ について,

$$E = \{x \in X \mid s(x) = t(t)\}$$

はイコライザである. $E \xrightarrow{i} X$ を包含写像とすると,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
E \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & Y
\end{tikzcd}$$

を満たすことが分かる. つまり, イコライザは方程式の解集合を記述している.

定義

$\mathscr{A}$ を圏とし，$\mathscr{A}$ の対象と射

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

について，引き戻しとは，図式

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

を可換にする三つ組 (P, p_1, p_2) であり，$\mathscr{A}$ の任意の可換四角図式

引き戻し

定義

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

について，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "\bar{f}"] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

を可換になる $A \xrightarrow{\bar{f}} P$ がただ一つ存在するという性質を持つものである.

定義

$\mathscr{A}$ を圏とし，$\mathscr{A}$ の対象と射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

について，押し出しとは，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "p_1"] \\ Z \arrow[r, "p_2"'] & P \end{tikzcd}$$

を可換にする三つ組 (P, p_1, p_2) であり，$\mathscr{A}$ の任意の可換四角図式

押し出し

定義

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "f_1"] \\ Z \arrow[r, "f_2"'] & A \end{tikzcd}$$

について，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ Z \arrow[r, "p_2"'] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & P \arrow[dr, dotted, "\bar{f}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

を可換になる $P \xrightarrow{\bar{f}} A$ がただ一つ存在するという性質を持つものである．

普遍性の例

Set の引き戻し

逆像は **Set** の引き戻しである. 実際, 関数 $X \xrightarrow{f} Y$ と部分集合 $Z \subset Y$ について, $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\} \subset X$ と,

$$
\begin{array}{rccc}
f' : & f^{-1}(Z) & \longrightarrow & Z \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & x & \longmapsto & f(x)
\end{array}
$$

と包含写像 $Z \overset{j}{\hookrightarrow} Y$ と $f^{-1}(Z) \overset{i}{\hookrightarrow} X$ が得られ, 図式

$$
\begin{tikzcd}
f^{-1}(Z) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "i"'] & Z \arrow[d, hook, "j"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換にする.

Set の引き戻し

任意の可換四角図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, hook, "j"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

について，

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& f^{-1}(Z) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "i"'] & Z \arrow[d, hook, "j"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換にする $A \xrightarrow{k} f^{-1}(Z)$ がただ一つ存在する．

参考文献

- Tom Leinster (著) ・「Basic Category Theory」・ Cambridge University Press・2014
- Emily Riehl (著) ・「Category Theory in Context」・Dover Publications ・2016
- http://alg-d.com/math/
- Saunders MacLane (原著), 三好 博之 (翻訳), 高木 理 (翻訳)・「圏論の基礎」・丸善出版・2012
- Steve Awodey (著), 前原 和寿 (訳)・「 圏論 原著第 2 版」・共立出版株式会社・2015
- 加藤 五郎 (著) ・「コホモロジーのこころ」・岩波書店・2015